UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2005/2006

Blatt 9 Abgabetermin: Montag, 9.1.2006

Aufgabe 41 (3+2=5 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\emptyset \neq Y \in \mathcal{A}$ eine messbare Menge. Wir betrachten die auf Y eingeschränkte σ-Algebra $\mathcal{A}|_Y$ (vergleiche Aufgabe 22) und die Einschränkung $\nu = \mu|_{(\mathcal{A}|_Y)}$ des Maßes auf $\mathcal{A}|_Y$. (Dann ist $(Y, \mathcal{A}|_Y, \nu)$ offenbar wieder ein Maßraum.) Sei E ein Banachraum. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$, so ist $f|_Y \in \mathcal{L}^1(\nu, E)$ und es gilt $\int_Y f|_Y d\nu = \int_X (f \cdot \chi_Y) d\mu$.

(b) Ist $g : Y \to E$ eine Funktion und

$$\tilde{g} : X \to E,\ \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & , \text{ falls } x \in Y \\ 0 & , \text{ falls } x \in X \setminus Y \end{cases}$$

die triviale Fortsetzung von g auf X, so gilt

$$\tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mu, E) \ \Leftrightarrow \ g \in \mathcal{L}^1(\nu, E)$$

und in diesem Fall ist $\int_Y g d\nu = \int_X \tilde{g} d\mu$.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $t \in I$ ist ist die Funktion $X \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(t, x)$ in $\mathcal{L}^1(\mu, R)$.

(ii) Für jedes $x \in X$ ist die Funktion $I \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t, x)$ differenzierbar. Die Ableitung dieser Funktion im Punkt $t \in I$ bezeichnen wir mit $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$.

(iii) Es gibt eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu, R)$ mit

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in I, x \in X.$$

Zeigen Sie:

- Für jedes $t \in I$ ist die Funktion $X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ in $\mathcal{L}^1(\mu, R)$.
- Die Funktion $F : I \to \mathbb{R},\ F(t) = \int_X f(t, x) d\mu(x)$ ist differenzierbar.
- Für jedes $t \in I$ gilt

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x).$$

(Hinweis: Wenden Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz und den Mittelwertsatz auf geeignete Differenzenquotienten an.)

Aufgabe 43 **(6∗1=6 Punkte)**

Welche der folgenden Funktionen $\mu_i^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ $(i = 1,\ldots,6)$ sind äußere Maße auf $\mathbb{R}$? Geben Sie für diese die σ-Algebra der μ_i^*-messbaren Mengen an.

$$\mu_1^*(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A = \emptyset \\ 1 & ; \quad A \neq \emptyset \end{cases} \quad , \quad \mu_2^*(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A = \emptyset \\ \infty & ; \quad A \neq \emptyset \end{cases} \quad ,$$

$$\mu_3^*(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A \text{ beschränkt} \\ 1 & ; \quad A \text{ unbeschränkt} \end{cases} \quad , \quad \mu_4^*(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A = \emptyset \\ 1 & ; \quad A \neq \emptyset,\ A \text{ beschränkt} \\ \infty & ; \quad A \text{ unbeschränkt} \end{cases} \quad ,$$

$$\mu_5^*(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A \text{ abzählbar} \\ 1 & ; \quad A \text{ überabzählbar} \end{cases} \quad , \quad \mu_6^*(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A \text{ abzählbar} \\ \infty & ; \quad A \text{ überabzählbar} \end{cases} \quad .$$

Aufgabe 44 **(6∗1=6 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_{[0,2]\times[-1,2]} (2x - 3y)\ d\lambda(x,y)$

(b) $\int_{[1,2]\times[1,2]} e^{x+y}\ d\lambda(x,y)$

(c) $\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x+y)\ d\lambda(x,y)$

(d) $\int_{[1,2]\times[2,3]\times[0,2]} \frac{2z}{(x+y)^2}\ d\lambda(x,y,z)$

(e) $\int_{[0,1]^3} \frac{x^2 z^3}{1+y^2}\ d\lambda(x,y,z)$

(f) $\int_{\mathbb{R}} f\ d\lambda$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(Begründen Sie hier auch, wieso $f \in \mathcal{L}^1(\lambda,\mathbb{R})$ ist.)

Aufgabe 45* **(1*+3*=4* Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass jede abzählbare Menge $Q \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

(b) Es sei $K_0 = [0,1]$ und für $K_n = \bigcup_{i=1}^{r_n} [a_i^n, b_i^n]$ $(r_n \in \mathbb{N}, a_i^n < b_i^n$ für $1 \leq i \leq r_n)$ sei

$$K_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{r_n} \left([a_i^n, a_i^n + \frac{1}{3}(b_i^n - a_i^n)] \cup [a_i^n + \frac{2}{3}(b_i^n - a_i^n), b_i^n] \right).$$

Die Menge $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ heißt *Cantormenge*. Zeigen Sie, dass K eine überabzählbare Lebesgue-Nullmenge ist.

(Hinweis: Für die Überabzählbarkeit zeigen Sie, dass K genau aus den Punkten $x \in [0,1]$ besteht, die eine 3-adische Entwicklung ohne die Ziffer 1 besitzen.)

Diese Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/∼ag-eschmeier/lehre

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!