Maßtheorie

Sei X ein Hausdorffscher topologischer Raum (oder metrischer Raum).

1. Unter einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X versteht man eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ mit

   (i) $\phi \in \mathcal{A}$

   (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

   (iii) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$.

   Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X gilt

   - $X \in \mathcal{A}$
   - $\mathcal{A}$ enthält mit jeder endlichen oder abzählbar unendlichen Folge von Mengen auch ihren Durchschnitt und ihre Vereinigung.

2. Die <u>Borelsche σ-Algebra</u> $\mathcal{B}(X)$ auf X ist definiert als die kleinste σ-Algebra auf X, die alle offenen ($\Leftrightarrow$ abgeschlossenen) Teilmengen von X enthält:

$$\mathcal{B}(X) := \cap(\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X);\ \mathcal{A}\ \ \sigma\text{-Algebra auf } X \text{ mit } U \in \mathcal{A}\ \forall U \subset X \text{ offen } .)$$

3. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt <u>Borel-messbar</u> (im Folgenden einfach messbar genannt),

$$\overset{-1}{f}(U) \in \mathcal{B}(X)\ \forall U \subset \mathbb{C} \text{ offen} \quad \big(\Leftrightarrow \overset{-1}{f}(A) \in \mathcal{B}(X)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})\big).$$

4. Es gilt:

   (i) Stetige Funktionen sind messbar (:= Borel-messbar).

   (ii) $f : X \to \mathbb{C}$ messbar, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow g \circ f$ messbar.

   (iii) Punktweise Limiten (von Folgen), Summen und Produkte von messbaren Funktionen sind messbar.

   (iv) $f : X \to \mathbb{C}$ messbar $\Rightarrow \frac{1}{f} : X \to \mathbb{C}$, $\frac{1}{f}(x) := \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & ;\quad f(x) \neq 0 \\ 0 & ;\quad \text{sonst} \end{cases}$ ist messbar.

   (v) $f : X \to \mathbb{C}$ messbar und beschränkt $\Rightarrow$ Es gibt eine Folge einfacher Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$ (einfach:= messbar mir nur endlich vielen Werten), so dass

$$(f_n) \xrightarrow{n} f \quad \text{gleichmäßig auf } X.$$

Sei $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ im Folgenden ein positives Maß.

5. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt Treppenfunktion (bzgl. μ), falls f einfach ist und
$$\mu(\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}) < \infty.$$

6. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt μ-messbar, falls eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{B}(X)$ und eine Folge von Treppenfunktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$ existieren mit
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall x \in X \setminus N.$$
Es gilt:
   (i) $f : X \to \mathbb{C}$ ist μ-messbar $\Leftrightarrow$ Es gibt eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{B}(X)$, eine σ-endliche Menge $A \in \mathcal{B}(X)$ und eine messbare Funktion $g : X \to \mathbb{C}$ mit
   $$f = g \text{ auf } N^c \quad \text{und} \quad f = 0 \text{ auf } A^c.$$
   Insbesondere ist auf einem σ-endlichen Maßraum jede messbare Funktion μ-messbar.
   (ii) Punktweise Limiten (von Folgen), Summen und Produkte μ-messbarer Funktionen sind μ-messbar.
   (iii) Mit $f : X \to \mathbb{C}$ sind auch $|f|$ und $\frac{1}{f}$ (siehe 4.(iv)) μ-messbar.

7. Eine Treppenfunktion $f : X \to \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung
$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varkappa_{A_i}$$
mit paarweise verschiedenen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und paarweise disjunkten Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(X)$.
In diesem Fall definiert man
$$\int_X f d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$
.

8. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt μ-integrabel, falls eine Folge von Treppenfunktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$ und eine μ-Nullmenge $B \in \mathcal{B}(X)$ existieren mit
   (i) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall\, x \in X \setminus N$,
   (ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \int_X |f_p - f_q| d\mu < \varepsilon\ \forall\, p, q \geq n_0$.

In diesem Fall existiert (und ist unabhängig von der Wahl der Folge (f_n)):

$$\int\limits_X f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

9. Die Menge $\mathcal{L}^1(\mu) := \{f;\ f : X \to \mathbb{C}\ \mu\text{-integrabel}\}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und

$$\mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int\limits_X f d\mu$$

ist $\mathbb{C}$-linear. Für $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist auch $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $|\int\limits_X f d\mu| \leq \int\limits_X |f| d\mu$ und

$$\mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_1 := \int\limits_X |f| d\mu$$

definiert eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\mu)$.

10. Sei $f : X \to \mathbb{C}$ μ-messbar. Gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $|f| \leq g$ μ-fast überall, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Insbesondere ist jede μ-messbare beschränkte Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, die außerhalb einer Menge $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $\mu(A) < \infty$ verschwindet, μ-integrabel.

11. (Satz von der majorisierten Konvergenz) Seien $f_n : X \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ μ-messbar, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f : X \to \mathbb{C}$ beliebig, so dass

    (i) $\big(f_n(x)\big) \xrightarrow{n} f(x)$ pktw. μ-fast überall

    (ii) $|f_n| \leq g\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

    Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\Big(\int\limits_X f_n d\mu\Big)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n} \int\limits_X f d\mu$$

12. (Satz von der monotonen Konvergenz) Seien $f_n : X \to [0,\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ μ-integrabel mit

    (i) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ist $f_n \leq f_{n+1}$ μ-fast überall,

    (ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Big(\int\limits_X f_n d\mu\Big) < \infty$.

    Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise außerhalb einer geeigneten μ-Nullmenge $N \in \mathcal{B}(X)$ und ist $f : X \to \mathbb{C}$ irgendeine Funktion mit $\big(f_n(x)\big) \xrightarrow{n} f(x)$ punktweise μ-fast überall, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\Big(\int\limits_X f_n d\mu\Big)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n} \int\limits_X f\, d\mu.$$