**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian

# Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Sommersemester 2006

## Blatt 1

Abgabetermin: Montag, 06.11.2006, vor der Vorlesung

---

**Versehen Sie Ihre Lösungen gut lesbar mit Ihrem Namen. Mit einem (*) versehene Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet, die anderen Aufgaben sollen schritlich gelöst und zum angegebenen Termin abgegeben werden.**

---

### Aufgabe 1 (*)

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Maß. Zeigen Sie: Durch

$$|\mu| : \mathcal{A} \to [0, \infty) \ , \ |\mu|(A) = \sup\{\sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)| \ ; \ n \in \mathbb{N} \text{ und } (A_j)_{j=1}^{n} \text{ messbare Zerlegung von } A\}$$

wird ein endliches positives Maß definiert. Hierbei heißt $(A_j)_{j=1}^{n}$ messbare Zerlegung von $A$, falls $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt sind mit $A = \cup_{j=1}^{n} A_j$.

---

### Aufgabe 2 (*)

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei

$$M(X, \mathcal{A}) = \{\mu \ ; \ \mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \text{ komplexes Maß } \}.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\| \cdot \| : M(X, \mathcal{A}) \to [0, \infty) \ , \ \|\mu\| = |\mu|(X) \quad (|\mu| \text{ wie in Aufgabe 1})$$

eine vollständige Norm auf dem Vektorraum $M(X, \mathcal{A})$ definiert wird.

---

*Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ heißt* **harmonisch**, *falls $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$ auf $\Omega$ gilt. In der Funktionentheorie I zeigt man, dass eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann harmonisch ist, wenn sie lokal Realteil einer holomorphen Funktion ist.*

### Aufgabe 3 (4x1=4 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch und $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. Zeigen Sie:

(a) $u_x$ und $u_y$ sind harmonisch.

(b) $f := u_x - iu_y$ ist holomorph.

(c) Entweder ist $u$ konstant oder die Menge $\{z \in \Omega \ ; \ \text{grad } u(z) = 0\}$ hat keinen Häufungspunkt in $\Omega$.

(d) $u_x$ ist konstant genau dann, wenn $u_y$ konstant ist.

---

(bitte wenden)

## Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass $u$ konstant ist, wenn $u$ auf $G$ ein absolutes Maximum (oder Minimum) besitzt.

*Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass $G = D_r(z_0)$ ist.*

---

*Sei $M \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $u : M \to [-\infty, \infty)$ heißt* **nach oben halbstetig**, *falls für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $\{z \in M \ ; \ u(z) < t\}$ offen in $M$ (d.h. offen bezüglich der Relativtopologie von $\mathbb{C}$) ist.*

## Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $u : K \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig. Zeigen Sie, dass $u$ nach oben beschränkt ist und sein Supremum auf $K$ annimmt.

---

Die Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

**http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre**