UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Sommersemester 2006

Blatt 2 Abgabetermin: Montag, 20.11.2006, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen gut lesbar mit Ihrem Namen. Mit einem (*) versehene Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet, die anderen Aufgaben sollen schriftlich gelöst und zum angegebenen Termin abgegeben werden.

Aufgabe 6 (*)

(a) Sei $f : \overline{\mathbb{D}}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ stetig, beschränkt und harmonisch auf $\mathbb{D}\backslash\{0\}$, und sei $g = P[f|\mathbb{T}]$. Zeigen Sie, dass $f = g$ auf $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie mit dem Maximumsprinzip, dass für jedes $\epsilon > 0$ die Funktion

$$h_\epsilon(z) = g(z) - f(z) + \epsilon \log |z|$$

auf $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ nur Werte ≤ 0 annimmt.

(b) Beweisen Sie eine Version des Riemannschen Hebbarkeitssatzes für harmonische Funktionen.

Aufgabe 7 (*)

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $u : K \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig mit $u \neq -\infty$. Zeigen Sie:

(a) Für $k \geq 1$ definiert

$$u_k(x) = \sup_{z \in K}\{u(z) - k|x - z|\}$$

eine stetige Funktion $u_k : K \to \mathbb{R}$ mit $|u_k(x) - u_k(y)| \leq k|x - y|$ für alle $x, y \in K$.

(b) Sei $x \in K$ mit $u(x) > -\infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ gilt.

Hinweis: Wählen Sie ein Folge $(x_k)_k$ in K mit $u_k(x) = u(x_k) - k|x - x_k|$ für alle k.

(c) Sei $x \in K$ mit $u(x) = -\infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ gilt.

Hinweis: Wenden Sie (b) auf die Funktionen $g_n = \max(u, -n)$ an.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei $(u_n)_n$ eine Folge harmonischer Funktionen $u_n : \Omega \to \mathbb{C}$, die kompakt gleichmäßig auf Ω gegen eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie: u ist harmonisch.

(bitte wenden)

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass u harmonisch ist genau dann, wenn für alle $a \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{D}_r(a) \subset \Omega$ gilt:

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(a)} u(x + iy)\, dx\, dy.$$

Aufgabe 10 (2+2+2+*=6 Punkte)

(a) Sei $u : \overline{D}_R(a) \to [0, \infty)$ stetig und harmonisch auf $D_r(a)$. Zeigen Sie mit Korollar 1.7 aus der Vorlesung, dass für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $0 \le r < R$ gilt:

$$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - t) + r^2} u(a + Re^{it})\, dt.$$

(b) Sei u wie in (a). Zeigen Sie:

$$\frac{R - r}{R + r} u(a) \le u(z) \le \frac{R + r}{R - r} u(a) \quad (z \in \overline{D}_r(a), 0 \le r < R).$$

(c) Zeigen Sie, dass jede beschränkte harmonische Funktion auf $\mathbb{C}$ konstant ist.

(d) Sei $u_1 \le u_2 \le \ldots$ eine monotone Folge harmonischer Funktionen $u_n : G \to \mathbb{R}$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Es gebe ein $a \in G$ so, dass die Folge $(u_n(a))_n$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass $(u_n)_n$ punktweise auf G gegen eine harmonische Funktion u konvergiert.

Die Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre