**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian

# Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Sommersemester 2006

**Blatt 3** Abgabetermin: Montag, 04.12.2006, vor der Vorlesung

---

**Versehen Sie Ihre Lösungen gut lesbar mit Ihrem Namen. Mit einem (*) versehene Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet, die anderen Aufgaben sollen schriftlich gelöst und zum angegebenen Termin abgegeben werden.**

---

## Aufgabe 11 (*)

(a) Sei $G$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$ und sei $\varphi : \overline{G} \to \overline{\mathbb{D}}$ ein Homöomorphismus, so dass $\varphi_{|G}$ und $(\varphi^{-1})_{|\mathbb{D}}$ holomorph sind. Zeigen Sie:

(i) $\varphi(G) = \mathbb{D}$ und $\varphi(\partial G) = \partial\mathbb{D}$.

(ii) Zu jeder stetigen Funktion $f : \partial G \to \mathbb{R}$ existiert eine stetige Fortsetzung $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$, die harmonisch auf $G$ ist.

(b) Sei $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} \,;\, \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig so, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ existieren. Zeigen Sie: Es existiert eine stetige Fortsetzung $u : \overline{\mathbb{H}^+} \to \mathbb{R}$ von $f$, die harmonisch auf $\mathbb{H}^+$ ist.

---

## Aufgabe 12 (*)

(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine nichtkonstante harmonische Funktion. Zeigen Sie, dass $u(\Omega) \subset \mathbb{R}$ offen ist.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit zusammenhängendem Rand $\partial\Omega$ und sei $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\overline{\Omega}$ und harmonisch auf $\Omega$. Zeigen Sie, dass $u(\Omega) \subset u(\partial\Omega)$ gilt.

---

## Aufgabe 13 (2+2=4 Punkte)

(a) Seien $u, v : \Omega \to \mathbb{C}$ harmonische Funktion auf einem Gebiet $\Omega$ in $\mathbb{C}$ so, dass die Menge

$$\{z \in \Omega \,;\, u(z) = v(z)\}$$

nichtleeres Inneres hat. Zeigen Sie: $u = v$.

(b) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge $Z(u) = \{a \in \Omega \,;\; u(a) = 0\}$ keine isolierten Punkte besitzen kann.

*Hinweis: Maximumsprinzip.*

---

(bitte wenden)

**Aufgabe 14** **(2+3+3 = 8 Punkte)**

Zeigen Sie:

(a) Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) $f$ ist holomorph mit $\operatorname{Re} f \geq 0$.

(ii) Es existieren ein positives Maß $\mu \in M^+([-\pi, \pi))$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi)} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \, d\mu(t) + i\alpha \quad (z \in \mathbb{D}).$$

(b) Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ harmonisch sind äquivalent:

(i) $(\|f_r\|_1)_{0 \leq r < 1}$ ist beschränkt.

(ii) Es existieren $g, h : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ harmonisch mit $f = g - h$.

(iii) Es existieren eindeutige harmonische Funktionen $f^+, f^- : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ mit $f = f^+ - f^-$ so, dass für jede Zerlegung $f = g - h$ wie in $(ii)$

$$g \geq f^+ \quad \text{und} \quad h \geq f^-$$

gilt.

*Hinweis zu $(iii)$: Benutzen Sie, dass ein entsprechendes Ergebnis für die Zerlegung eines reellen Maßes $\mu$ in Positiv- und Negativteil gilt.*

(c) Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ harmonisch sind äquivalent:

(i) $(\|f_r\|_1)_{0 \leq r < 1}$ ist beschränkt.

(ii) Es existiert $u : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ harmonisch mit $|f| \leq u$.

---

Die Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

**http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre**