UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Sommersemester 2006

Blatt 4 Abgabetermin: Montag, 18.12.2006, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen gut lesbar mit Ihrem Namen. Mit einem (*) versehene Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet, die anderen Aufgaben sollen schriftlich gelöst und zum angegebenen Termin abgegeben werden.

Aufgabe 15 (*)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie:

(a) f besitzt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ einen rechts- und linksseitigen Grenzwert.

(b) f hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

(c) Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ g(x) = \lim_{h \searrow 0} f(x+h)$$

ist monoton wachsend, rechtsseitig stetig, und es gilt $f(x) = g(x)$ für alle Stetigkeitsstellen x von f.

(d) f ist (Lebesgue-) fast überall differenzierbar.

Hinweis: Ist $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ rechtsseitig stetig, monoton wachsend und beschränkt, und gilt $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$, so existiert ein Maß μ auf $\mathbb{R}$ mit $h(x) = \mu((-\infty, x])$. für alle $x \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie dieses Resultat ohne Beweis.

Aufgabe 16 (*)

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion F in (Lebesgue-) fast allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $F'(x) = f(x)$.

Aufgabe 17 (3 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k)$ und sei $\mu_f \in M(\mathbb{R}^k)$ definiert durch

$$\mu_f(A) = \int_A f\ dm \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)).$$

Zeigen Sie: Ist f stetig in x_0, so existiert $(D\mu_f)(x_0)$, und es gilt $(D\mu_f)(x_0) = f(x_0)$.

(bitte wenden)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ heißt subharmonisch, falls u nach oben halbstetig ist und für jedes $z_0 \in \Omega$ mit $u(z_0) > -\infty$ und jede relle Zahl $r > 0$ mit $\overline{D}_r(z_0) \subset \Omega$

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it})\ dt$$

gilt (Integrabilität wird mitverlangt).

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Sei $u : G \to [-\infty, \infty)$ eine subharmonische Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Gibt es ein $a \in G$ mit $u(z) \leq u(a)$ für alle $z \in G$, so ist $u \equiv u(a)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge $M = \{z \in G\ ;\ u(z) = u(a)\}$.

Aufgabe 19 (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $u_1 \geq u_2 \geq \ldots$ eine Folge subharmonischer Funktionen auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass der punktweise Limes $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ subharmonisch auf Ω ist.

(b) Seien $u_n : \Omega \to [-\infty, \infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ subharmonische Funktionen auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ so, dass $\sup_{n\geq 1} u_n$ lokal nach oben beschränkt ist und die Funktion $u = \limsup_{n\to\infty} u_n$ nach oben halbstetig ist. Zeigen Sie, dass dann u subharmonisch ist.

Die Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre