UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Sommersemester 2006

Blatt 5 Abgabetermin: Montag, 15.01.2007, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen gut lesbar mit Ihrem Namen. Mit einem (*) versehene Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet, die anderen Aufgaben sollen schriftlich gelöst und zum angegebenen Termin abgegeben werden.

Aufgabe 20 (*)

(a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $u : G \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch mit

$$\operatorname{Int}(\{z \in G \; ; \; u(z) = -\infty\}) \neq \emptyset.$$

Zeigen Sie, dass $u \equiv -\infty$.

(b) Sei $u : D_R(z_0) \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch mit $u \not\equiv -\infty$. Zeigen Sie, dass

$$M : (-\infty, \log R) \to \mathbb{R} \; , \; M(t) = \max_{|z-z_0|=e^t} u(z)$$

monton wachsend und konvex ist.

Hinweis: Sei $z_0 = 0$. Für $t_1 < t_2$ ist die Funktion

$$h : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \; , \; h(z) = \frac{\log|z| - t_1}{t_2 - t_1} M(t_2) + \frac{t_2 - \log|z|}{t_2 - t_1} M(t_1)$$

harmonisch.

Aufgabe 21 (*)

(a) Sei $u : \mathbb{C} \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch so, dass

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\max\{u(z) \; ; \; |z| = r\}}{\log r} = 0.$$

Zeigen Sie, dass u konstant ist.

Hinweis: Für $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex ist $\frac{M(t)-M(0)}{t}$ für $t > 0$ monoton wachsend.

(b) Leiten Sie eine Version des Satzes von Liouville für subharmonische Funktionen her.

(bitte wenden)

Aufgabe 22 (1+1+2=4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Man zeige:

(a) Hat u in $a \in \Omega$ ein lokales Maximum, so ist $\Delta u(a) \leq 0$.

(b) Ist $\Delta u \geq 0$, so lässt sich u von oben punktweise monoton durch eine Folge $(u_n)_n$ in $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ mit $\Delta u_n > 0$ approximimieren.

Hinweis: Berechnen Sie $\Delta |z|^2$.

(c) Es sind äquivalent:

(i) $\Delta u \geq 0$ auf Ω.

(ii) u ist subharmonisch.

Aufgabe 23 (3+1=4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei $a \in \Omega$. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : \Omega \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch so, dass f auf keiner Komponente von Ω konstant $-\infty$ ist und so, dass die Menge

$$E = \{z \in \Omega \; ; \; f(z) = -\infty\}$$

abgeschlossen in Ω ist, so ist jede stetige Funktion $\varphi : \Omega \to [-\infty, \infty)$ mit $\varphi_{|\Omega \setminus E}$ subharmonisch schon auf ganz Ω subharmonisch.

(b) Ist $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ stetig und subharmonisch auf $\Omega \setminus \{a\}$, so ist u subharmonisch auf ganz Ω.

Aufgabe 24 (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $(u_i)_{i \in I}$ eine punktweise nach oben beschränkte Familie subharmonischer Funktionen $u_i : \Omega \to [-\infty, \infty)$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ so, dass

$$u : \Omega \to [-\infty, \infty) \; , \; u(x) = \sup_{i \in I} u_i(x)$$

nach oben halbstetig ist. Zeigen Sie, dass u subharmonisch ist.

(b) Sei $\emptyset \neq G \subsetneq \mathbb{C}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$G \to [-\infty, \infty) \; , \; z \mapsto -\log(\operatorname{dist}(z, \partial G))$$

subharmonisch ist. Hierbei bezeichne

$$\operatorname{dist}(z, \partial G) = \inf\{|z - w| \; ; \; w \in \partial G\}$$

den Randabstand von z.

Die Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/∼ag-eschmeier/lehre