UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Christoph Barbian

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Sommersemester 2006

Blatt 6 Abgabetermin: Montag, 29.01.2007, vor der Vorlesung

Versehen Sie Ihre Lösungen gut lesbar mit Ihrem Namen. Mit einem (*) versehene Aufgaben werden in der Übung gemeinsam erarbeitet, die anderen Aufgaben sollen schriftlich gelöst und zum angegebenen Termin abgegeben werden.

Aufgabe 25 (*)

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ nullstellenfrei mit

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{it})| \, dt < \infty.$$

Man zeige, dass es Funktionen $g, h \in H^\infty$ gibt mit $f = \frac{g}{h}$ (h nullstellenfrei).

Hinweis: Im Falle $f(0) > 0$ gibt es ein reelles Maß $\mu \in M[-\pi, \pi)$ so, dass $\log|f| = P[\mu]$ ist und die Funktion

$$\mathbb{D} \to \mathbb{C}\ ,\ z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi)} \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} \, d\mu(t)$$

einen holomorphen Logarithmus für f definiert.

Aufgabe 26 (2+2+*=4 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $\varphi(0) = 0$. Man zeige:

(a) Ist $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ subharmonisch und stetig, so gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi(re^{it})) \, dt \le \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it}) \, dt \quad (0 \le r < 1).$$

Hinweis: Beweis von Satz 5.15.

(b) Ist $f \in H^p$ $(1 \le p \le \infty)$, so ist auch $f \circ \varphi \in H^p$ mit $\|f \circ \varphi\|_p \le \|f\|_p$.

(c) Teil (a) bleibt richtig, und damit auch Satz 5.15 aus der Vorlesung, wenn man nur voraussetzt, dass $u : \mathbb{D} \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch ist.

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\log|f(re^{it})|\right| \, dt = 0.$$

Zeigen Sie, dass $f = e^{i\theta} B$ ist mit $\theta \in \mathbb{R}$ und einem geeigneten Blaschkeprodukt B.

Hinweis: Wählen Sie eine Zerlegung $f = Bg$ mit einem Blaschkeprodukt B und einer nullstellenfreien holomorphen Funktion g und zeigen Sie, dass $|g| \equiv 1$.

(bitte wenden)

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Sei $f(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$ für $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph ist mit

$$\lim_{r \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{it})| \, dt < \int_{-\pi}^{\pi} \log |f^*(e^{it}| \, dt.$$

Die Übungsblätter können Sie sich auch über unsere Homepage besorgen:

http://www.math.uni-sb.de/~ag-eschmeier/lehre