Der Satz von Fubini

("Cohn, Measure Theory", Chapter 5 oder "Elstrodt, Maß- und Integrationstheorie", Kapitel V)

Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ messbare Räume. Es bezeichne $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ die von dem Mengensystem $\{A \times B;\ A \in \mathcal{A} \text{ und } B \in \mathcal{B}\}$ erzeugte σ-Algebra auf $X \times Y$.

1. Für $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ und $x \in X$, $y \in Y$ gilt
$$E_x := \{t \in Y;\ (x,t) \in E\} \in \mathcal{B},\ E^y := \{t \in X;\ (t,y) \in E\} \in \mathcal{A}.$$

2. Für jede messbare Funktion $f : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ und $x \in X$, $y \in Y$ sind die Schnitte
$$f_x : Y \to \mathbb{C},\ t \mapsto f(x,t), \quad f^y : X \to \mathbb{C},\ t \mapsto f(t,y)$$
messbare Funktionen auf $(Y, \mathcal{B})$ bzw. $(X, \mathcal{A})$.

Seien $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\nu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ σ-endliche Maße.

3. Es gibt genau ein Maß (das Produktmaß von μ und ν) $\mu \times \nu : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to [0, \infty]$ mit
$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad (A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}).$$
Dieses Maß ist wieder σ-endlich.

4. (Satz von Fubini, Teil I) Sei $f : X \times Y \to [0, \infty)$ bezüglich $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, oder allgemeiner, $(\mu \times \nu)$-messbar. Gibt es eine μ-Nullmenge $Z \in \mathcal{A}$ mit
$$f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\nu) \quad (x \in X \setminus Z),$$
so dass die Funktion $G : X \to \mathbb{C}$,
$$G(x) = \int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) \ \text{ für } x \in X \setminus Z, \quad G(x) = 0 \ \text{ für } x \in Z$$
in $\mathcal{L}^1(\mu)$ liegt, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$. Sinngemäß bleibt alles richtig, wenn man in der Voraussetzung die Rollen von μ und ν vertauscht.

5. (Satz von Fubini, Teil II) Zu $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$ gibt es eine μ-Nullmenge $Z \in \mathcal{A}$ mit
$$f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\nu) \quad (x \in X \setminus Z).$$
Ist Z eine solche μ-Nullmenge und ist $G : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit
$$G(x) = \int\limits_Y f(x,y)d\nu(y) \text{ für } x \in X \setminus Z,$$
so liegt G in $\mathcal{L}^1(\mu)$ und
$$\int\limits_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int\limits_X G(x) d\,\mu(x) \Big(=: \int\limits_X \big(\int\limits_Y f(x,y) d\nu(x)\big) d\,\mu(x)\Big).$$
Entsprechend gibt es eine ν-Nullmenge $\tilde{Z} \in \mathcal{B}$ mit
$$f(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad (y \in Y \setminus \tilde{Z})$$
und
$$\int\limits_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int\limits_Y \big(\int\limits_X f(x,y) d\,\mu(x)\big) d\nu(y),$$
wobei das innere Integral als Funktion von y auf $Y \setminus \tilde{Z}$ als Integral und auf $\tilde{Z}$ völlig beliebig definiert sei.

Seien X, Y topologische Räume.

6. Die Borelschen σ-Algebren erfüllen die Relation
$$\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y).$$
Dies folgt aus der Borel-Messbarkeit der Projektionen $\pi_1 : X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$ und der Formel
$$A \times B = \overset{-1}{\pi_1}(A) \cap \overset{-1}{\pi_2}(B) \quad \big(A \in \mathcal{A}(X),\ B \in \mathcal{B}(Y)\big).$$
Besitzen die Topologien von X und Y abzählbare Basen, so gilt auch die umgekehrte Inklusion, das heißt, es gilt
$$\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y).$$

7. Auf einem lokalkompakten Hausdorffraum mit abzählbarer Basis ist jedes Borelmaß $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ mit $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset X$ regulär und σ-endlich (Proposition 7.2.3 und Proposition 7.2.5 in [Cohn]).

8. Sind X, Y lokalkompakte Haudorffräume, deren Topologien abzählbare Basen besitzen, so ist das Produkt zweier positiver regulärer Borelmaße μ auf X und ν auf Y ein positives reguläres Borelmaß auf dem topologischen Produkt $X \times Y$. Da $X \times Y$ wieder lokalkompakt mit abzählbarer Basis ist, ist das Produktmaß automatisch wieder σ-endlich (Proposition 7.6.2 in [Cohn]).