Halbstetige Funktionen

Sei Ω ein metrischer Raum. Eine Funktion $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ heißt nach oben halbstetig, falls für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{z \in \Omega;\ u(z) < t\}$$

offen in Ω ist.

(1) Sind $u, v : \Omega \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig, so sind auch die Funktionen

$$u + v,\ \alpha u\ (\alpha > 0),\ \max(u, v),\ \min(u, v)$$

nach oben halbstetig. Ist $A \subset \Omega$ abgeschlossen in Ω, so ist die charakteristische Funktion $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$, $\chi_A(z) = 1$ für $z \in A$ und $\chi_A(z) = 0$ für $z \in \Omega \setminus A$, nach oben halbstetig. Mit jeder Familie $(u_i)_{i \in I}$ nach oben halbstetiger Funktionen $u_i : \Omega \to [-\infty, \infty)$ ist auch das punktweise gebildete Infimum $\inf\limits_{i \in I} u_i : \Omega \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig.

(2) Sei K ein kompakter metrischer Raum und $u : K \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig. Dann ist u nach oben beschränkt auf K und nimmt sein Supremum an.

(3) Sei K ein kompakter metrischer Raum und $u : K \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig. Dann gibt es eine punktweise monoton fallende Folge stetiger Funktionen $u_n : K \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ mit $u(x) = \lim\limits_{u \to \infty} u_n(x)$ für alle $x \in K$.

Die Aussagen unter (1) folgen direkt aus der Definition nach oben halbstetiger Funktionen. Wir beweisen (2) und (3). Zum Beweis beider Behauptungen dürfen wir annehmen, dass $s = \sup\limits_{z \in K} u(z) > -\infty$.

Da u nach oben halbstetig ist, gibt es zu jedem $z \in K$ eine reelle Zahl t_z und eine Umgebung U_z von z mit $u < t_z$ auf U_z. Da K kompakt ist, überdecken endlich viele dieser Umgebungen $U_{z_1}, \ldots, U_{z_r}$ die Menge K und folglich ist $u < \max\limits_{i=1,\ldots,r} t_{z_i}$ auf K. Sei (z_n) eine Folge in K mit $u(z_n) > s - \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$. Da K kompakt ist, können wir durch Übergang zu einer Teilfolge erreichen, dass (z_n) konvergiert gegen ein $z \in K$. Die Annahme, dass $u(z) \neq s$ ist, führt zu dem Widerspruch, dass eine Umgebung U von z und ein $\varepsilon > 0$ existieren müssten mit $u < s - \varepsilon$ auf ganz U.

Zum Beweis von (3) betrachte man die Funktionen

$$u_n : K \to \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \sup_{z \in K} \big(u(z) - nd(x,z)\big).$$

Offensichtlich ist die Folge $(u_n)_{n\geq 1}$ punktweise monoton fallend und nach unten beschränkt durch u. Sei $n \geq 1$ und seien $x, y \in K$. Da für alle $z \in K$ mit $u(z) \neq -\infty$ die Ungleichungen

$$u(z) - nd(x,z) - u_n(y) \leq u(z) - nd(x,z) - u(z) + nd(y,z) \leq nd(y,x)$$

gelten, ist $u_n(x) - u_n(y) \leq nd(y,x)$. Indem man x und y vertauscht, erhält man die Abschätzung $|u_n(x) - u_n(y)| \leq nd(x,y)$ und damit die Stetigkeit der Funktionen u_n. Sei $x \in K$ fest und $t \in \mathbb{R}$ mit $u(x) < t$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x in K so, dass $u < t$ auf U gilt. Da u nach oben beschränkt ist auf K, folgt

$$\sup_{z \in K \setminus U} \big(u(z) - nd(x,z)\big) \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} -\infty.$$

Da andererseits das entsprechende Supremum über der Menge U nicht größer als t ist, gilt $u_n(x) \leq t$ für genügend große n. Da $t > u(x)$ beliebig war, ist $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$.