UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Professor Dr. Jörg Eschmeier

Übungen zur Vorlesung
Maß- und Integrationstheorie
Wintersemester 2007/2008

Blatt 1 Abgabetermin: Mittwoch, 14.11.2007, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man zeige:

(a) Ist f differenzierbar, so ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar.

(b) Gibt es eine abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ so, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus A$ stetig ist, so ist f Borel-messbar.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $\emptyset \neq Y \subset X$ eine nicht-leere Teilmenge einer Menge X. Für $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(X)$ schreibe $\mathcal{E}|_Y = \{A \cap Y;\ A \in \mathcal{E}\}$. zeigen Sie: $\sigma(\mathcal{E})|_Y = \sigma(\mathcal{E}|_Y)$.

(b) Sei $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{R}^p$. Zeigen Sie: $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)|_Y$.

Aufgabe 3 (2+3+2=7 Punkte)

Eine Teilmenge $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ heiße Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{R}$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[\subset V$. Sie heiße Umgebung von $+\infty$ (bzw. $-\infty$), falls ein $r \in \mathbb{R}$ existiert mit $]r, \infty] \subset V$ (bzw. $[-\infty, r[\subset V$). Man zeige:

(a) $\overline{t} = \{U \subset \overline{\mathbb{R}};\ \forall\, a \in U\ \exists$ eine Umgebung V von a mit $V \subset U\}$ definiert eine Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$.

(b) $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{t})$ ist ein kompakter Hausdorffraum, der $\mathbb{R}$ als dichte offene Teilmenge enthält.

(c) Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar im Sinne der Vorlesung genau dann, wenn sie als Funktion mit Werten in dem topologischen Raum $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{t})$ Borel-messbar ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(X)$. Man zeige, dass zu jedem $A \in \sigma(\mathcal{E})$ eine abzählbare Menge $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ existiert mit $A \in \sigma(\mathcal{E}_0)$.

Hinweis: Man betrachte das System $\mathcal{A} = \bigcup (\sigma(\mathcal{E}_0);\ \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ abzählbar).