UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Professor Dr. Jörg Eschmeier

Übungen zur Vorlesung
Maß- und Integrationstheorie
Wintersemester 2007/2008

Blatt 2 Abgabetermin: Mittwoch, 28.11.2007, vor der Vorlesung

---

Für eine Menge X und eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(X)$ sei

$$\varlimsup_{k\to\infty} A_k = \{x \in X;\ x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\},$$
$$\varliminf_{k\to\infty} A_k = \{x \in X;\ x \in A_k \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Die Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, falls $\varlimsup\limits_{k\to\infty} A_k = \varliminf\limits_{k\to\infty} A_k$ $(=: \lim\limits_{k\to\infty} A_k)$ gilt.

Aufgabe 5 (4x1=4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_k \in \mathcal{A}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\varlimsup\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, $\varliminf\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} A_n$

(b) $\mu(\varliminf\limits_{k\to\infty} A_k) \leq \varliminf\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$

(c) $\mu(\varlimsup\limits_{k\to\infty} A_k) \geq \varlimsup\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$, falls $\mu(\bigcup\limits_{n=k_0}^{\infty} A_n) < \infty$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$

(d) Ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\mu(\bigcup\limits_{n=k_0}^{\infty} A_n) < \infty$ für ein k_0, so gilt $\mu(\lim\limits_{k\to\infty} A_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt kein Maß μ auf $\mathcal{B}([0,1])$ mit $\mu([0,1]) = 1$, das nur die Werte 0 und 1 annimmt und auf allen endlichen Teilmengen von $[0,1]$ verschwindet.
Hinweis: Intervallschachtelungsprinzip.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $(X, \mathcal{A})$ mit $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$$

ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ definiert wird.

bitte wenden...

Aufgabe 8 **(4 Punkte)**

Sei $V \subset \{f;\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Funktion }\}$ ein Teilvektorraum so, dass

(i) V jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enthält,

(ii) für jede Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in V mit $f_k \leq f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ auch der punktweise Limes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ zu V gehört.

Zeigen Sie, dass V alle Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enthält.
Hinweis: Begründen Sie zunächst, dass die Menge $\mathcal{D} = \{A \subset \mathbb{R};\ \varkappa_A \in V\}$ alle Intervalle der Form $(-\infty, b)$ $(b \in \mathbb{R})$ enthält.