



**Übungen zur Vorlesung
Maß- und Integrationstheorie
Wintersemester 2007/2008**

Blatt 3

Abgabetermin: Mittwoch, 12.12.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 9

(1+3=4 Punkte)

Sei $\mu : \mathfrak{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ das Zählmaß über einer unendlichen Menge X und sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Man zeige:

- (a) Ist f μ -integabel, so ist $A_f := \{x \in X; f(x) \neq 0\}$ abzählbar
- (b) Ist $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$ injektiv und $A_f \subset \text{Im } \varphi$, so gilt

$$f \text{ ist } \mu\text{-integabel} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |f(\varphi(n))| < \infty.$$

In diesem Fall ist $\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(\varphi(n))$.

Aufgabe 10

(2x1+2x2=6 Punkte)

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathfrak{N})$ ein messbarer Raum und $f : X \rightarrow Y$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie:

- (a) $\mu^f : \mathfrak{N} \rightarrow [0, \infty]$, $\mu^f(B) = \mu(f^{-1}(B))$ definiert ein Maß auf $\mathfrak{N}$.
- (b) Für jede einfache Funktion $g : Y \rightarrow [0, \infty)$ gilt $\int_Y g d\mu^f = \int_X g \circ f d\mu$.
- (c) Für jede $\mathfrak{N}$ -messbare Funktion $g : Y \rightarrow [0, \infty]$ gilt

$$\int_Y g d\mu^f = \int_X g \circ f d\mu.$$

- (d) Eine $\mathfrak{N}$ -messbare Funktion $g : Y \rightarrow [-\infty, \infty]$ ist genau dann μ^f -integabel, wenn $g \circ f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μ -integabel ist. In diesem Fall ist

$$\int_Y g d\mu^f = \int_X g \circ f d\mu.$$

Aufgabe 11**(4 Punkte)**

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μ -integrabel.

Zeigen Sie: Sind $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $\alpha \leq 0 \leq \beta$ und

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in [\alpha, \beta]$$

für alle Mengen $A \in \mathfrak{M}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$, so ist $f(x) \in [\alpha, \beta]$ für μ -fast alle $x \in X$.

Aufgabe 12**(2x2=4 Punkte)**

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. Für $B \in \mathfrak{M}$ sei $\mathfrak{M}|_B$ die Spur- σ -Algebra von $\mathfrak{M}$ auf B und $\mu_B = \mu|_{(\mathfrak{M}|_B)}$ das eingeschränkte Maß. Man zeige:

- (a) Ist $f : B \rightarrow [-\infty, \infty]$ μ_B -integrabel, so ist die Funktion $\tilde{f} : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \in B$, $\tilde{f}(x) = 0$ sonst, μ -integrabel mit

$$\int_B f d\mu_B = \int_X \tilde{f} d\mu.$$

- (b) Ist $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μ -integrabel, so ist $f|_B : B \rightarrow [-\infty, \infty]$ μ_B -integrabel mit
- $$\int_B (f|_B) d\mu_B = \int_X (f \chi_B) d\mu.$$