UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Professor Dr. Jörg Eschmeier

Übungen zur Vorlesung
Maß- und Integrationstheorie
Wintersemester 2007/2008

Blatt 4 Abgabetermin: Mittwoch, 9.1.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 13 (3x2=6 Punkte)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Für $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(Y)$ sei $\overset{-1}{f}(\mathcal{B}) = \{\overset{-1}{f}(B);\ B \in \mathcal{B}\}$. Man zeige:

(a) Ist $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y mit Erzeugendemsystem $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(Y)$, so ist $\overset{-1}{f}(\mathcal{B})$ eine σ-Algebra auf X mit Erzeugendemsystem $\overset{-1}{f}(\mathcal{F})$.

(b) Sind $(X_i, \mathfrak{M}_i)_{i=1,2}$ messbare Räume und werden die σ-Algebren $\mathfrak{M}_i$ erzeugt durch $\mathcal{E}_i \subset \mathfrak{P}(X_i)$, so wird die Produkt-$\sigma$-Algebra $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ erzeugt durch

$$\{A \times X_2;\ A \in \mathcal{E}_1\} \cup \{X_1 \times B;\ B \in \mathcal{E}_2\}.$$

(c) Enthalten die Mengensysteme $\mathcal{E}_i$ in Teil (b) Folgen $(A_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{in}$ für $i = 1, 2$, so ist auch $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 = \sigma(\{A \times B;\ A \in \mathcal{E}_1 \text{ und } B \in \mathcal{E}_2\})$.

Aufgabe 14 (4 Punkte)

Sei λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$ und $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0,0) = 0$ und $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ sonst. Zeigen Sie, dass

$$\int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y) d\lambda(y) \Big) d\lambda(x) \neq \int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} f(x,y) d\lambda(x) \Big) d\lambda(y),$$

obwohl beide Doppelintegrale existieren. Hinweis: Bilden Sie partielle Ableitungen von $\arctan \frac{x}{y}$. Sie dürfen benutzen, dass für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen das Lebesgue-Integral gleich dem Riemann-Integral ist.

Aufgabe 15 (3 Punkte)

Seien $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ und $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Sei $E \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ eine Menge so, dass $\nu(E_x) = 0$ für μ-fast alle $x \in X$ gilt. Zeigen Sie, dass $\mu(E^y) = 0$ für ν-fast alle $y \in Y$.

bitte wenden...

Aufgabe 16 **(2x2=4 Punkte)**

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, λ das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $f : X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{M}$-messbar. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $E := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R};\ 0 \leq y < f(x)\}$ liegt in $\mathfrak{M} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_{[0,\infty)} \mu(\{x \in X;\ f(x) > y\}) d\lambda(y)$.

Fröhliche Weihnachten

und einen guten Rutsch ins Jahr 2008