UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Professor Dr. Jörg Eschmeier

Übungen zur Vorlesung
Maß- und Integrationstheorie
Wintersemester 2007/2008

Blatt 5 Abgabetermin: Mittwoch, 23.1.2008, vor der Vorlesung

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{L}^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu, \mathbb{C})$ für $1 \le p \le \infty$.

Aufgabe 17 (2x2=4 Punkte)

Seien $1 \le p, p' \le \infty$ und $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^{p'}(\mu)$ $(n \in \mathbb{N})$. Man zeige:

(a) Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n} 0$, so gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so, dass $(f_{n_k}(x)) \xrightarrow{k} f(x)$ μ-fast überall.

(b) Konvergiert (f_n) in $\mathcal{L}^p(\mu)$ gegen $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und in $\mathcal{L}^{p'}(\mu)$ gegen $g \in \mathcal{L}^{p'}(\mu)$, so ist $f = g$ μ-fast überall.

Aufgabe 18 (3 Punkte)

Gibt es $1 \le p < p' < \infty$ und eine Konstante $C > 0$ mit $\mathcal{L}^{p'}(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\|f\|_p \le C\|f\|_{p'}$ für alle $f \in \mathcal{L}^{p'}(\mu)$, so ist

$$\sup\{\mu(A);\ A \in \mathfrak{M} \text{ mit } \mu(A) < \infty\} < \infty.$$

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Seien $1 \le p < p' < \infty$ und sei $f \in \mathcal{L}^p(\mu) \cap \mathcal{L}^{p'}(\mu)$. Man zeige, dass $f \in \mathcal{L}^r(\mu)$ ist für alle $p < r < p'$ und dass die Funktion $\varphi : [p, p'] \to \mathbb{R}$, $\varphi(r) = \log \|f\|_r^r$ konvex ist.
Hinweis: Schätzen Sie für $r = tp + (1-t)p'$ das Integral $\|f\|_r^r$ mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung nach oben ab.

Aufgabe 20 (2x2=4 Punkte)

Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Man zeige:

(a) Für $a, b \in [0, \infty)$ gilt: $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} = \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \Leftrightarrow a = b$.

(b) Für $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ gilt:

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q \Leftrightarrow \exists A, B \ge 0 \text{ mit } (A, B) \ne (0,0) \text{ und } A|f|^p = B|g|^q \ \mu\text{-fast überall}.$$

Hinweis: Beweis der Hölderschen Ungleichung.