UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Professor Dr. Jörg Eschmeier

Übungen zur Vorlesung
Maß- und Integrationstheorie
Wintersemester 2007/2008

Blatt 6 Abgabetermin: Mittwoch, 6.2.2008, vor der Vorlesung

Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum.

Aufgabe 21 **(3 Punkte)**

Seien μ ein signiertes und ν_1, ν_2 positive Maße auf $(X, \mathfrak{M})$. Man zeige:

Ist $\mu = \nu_1 - \nu_2$, so gilt $\mu^+(A) \leq \nu_1(A)$ und $\mu^-(A) \leq \nu_2(A)$ für alle $A \in \mathfrak{M}$.

Aufgabe 22 **(4 Punkte)**

Sei μ ein komplexes Maß auf $(X, \mathfrak{M})$. Man zeige, dass für $A \in \mathfrak{M}$ gilt

$$\sup\{|\mu(B)|;\ \mathfrak{M} \ni B \subset A\} \ \leq\ |\mu|(A)\ \leq\ 4\sup\{|\mu(B)|;\ \mathfrak{M} \ni B \subset A\}.$$

Hinweis: Jordan-Zerlegung.

Aufgabe 23 **(3 + 1 = 4 Punkte)**

Sei μ ein komplexes Maß auf $(X, \mathfrak{M})$ mit Jordan-Zerlegung $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$. Man zeige:

(a) Für jede $\mathfrak{M}$-messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(|\mu|) \Leftrightarrow f \in \bigcap_{i=1}^{4} \mathcal{L}^1(\mu_i)$$

Hinweis: Reduziere die Behauptung auf den Fall $f \geq 0$ und benutze Aufgabe 22.

(b) Durch $\mathcal{L}^1(|\mu|) \to \mathbb{C}$,

$$f \mapsto \int_X f d\mu := \int_X f d\mu_1 - \int_X f d\mu_2 + i\Big(\int_X f d\mu_3 - \int_X f d\mu_4\Big)$$

wird eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung definiert.

bitte wenden...

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Sei μ ein komplexes Maß auf $(X, \mathfrak{M})$ und $f : X \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, $\mathfrak{M}$-messbare Funktion. Man zeige, dass

$$\Big| \int\limits_X f d\mu \Big| \leq \int\limits_X |f| \; d \; |\mu| \leq \|f\|_X \; \|\mu\|.$$

Hierbei sei das Integral $\int\limits_X f d\mu$ wie in Aufgabe 23 definiert.

Hinweis: Betrachte zunächst den Fall, dass f eine einfache Funktion ist.