UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dr. Christoph Barbian

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren

Wintersemester 2007/2008

Blatt 1 Abgabetermin: Montag, 05.11.2007, vor der Vorlesung

Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra mit Einselement e. Für $x \in \mathcal{A}$ sei

$$\sigma(x) = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ ze - x \text{ ist nicht invertierbar in } \mathcal{A}\}$$

das Spektrum von x und $r(x) = \sup\{|z| \ ; \ z \in \sigma(x)\}$ der Spektralradius von x. Man kann zeigen, dass

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \ (\leq \|x\|)$$

für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt (Satz 3.1.6 in [Schröder]).

Aufgabe 1 (2+2+2=6 Punkte)

Sei $A(\mathbb{D})$ die Diskalgebra über dem Einheitskreis $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < 1\}$, das heißt, die Banachalgebra

$$A(\mathbb{D}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \ ; \ f_{|\mathbb{D}} \text{ ist holomorph}\},$$

versehen mit der Norm $\|f\| = \|f\|_{\infty,\overline{\mathbb{D}}}$.

(a) Berechne für $f \in A(\mathbb{D})$ das Spektrum $\sigma(f)$ von f in $A(\mathbb{D})$.

(b) Zeigen Sie, dass $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ eine isometrische Involution auf $A(\mathbb{D})$ definiert.

(c) Zeigen Sie, dass $A(\mathbb{D})$ mit dieser Involution keine C^*-Algebra ist.

Aufgabe 2 (2+2=4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und sei $x \in \mathcal{A}$ normal, das heißt, $xx^* = x^*x$. Zeigen Sie:

(a) $\|x\|^4 = \|x^2\|^2$.

(b) $r(x) = \|x\|$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass auf einer unitalen Algebra $\mathcal{A}$ mit Involution höchstens eine Norm existiert, die $\mathcal{A}$ zu einer C^*-Algebra macht. Folgern Sie, dass jeder $*$-Isomorphismus zwischen zwei unitalen C^*-Algebren isometrisch ist.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2!

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und sei $a \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eindeutig bestimmte selbstadjungierte Elemente $x, y \in \mathcal{A}$ mit $a = x + iy$.

(b) Für a und x, y wie in (a) gilt:

$$a \text{ ist normal } \Leftrightarrow xy = yx.$$

---

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre