



Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren
Wintersemester 2007/2008

Blatt 2

Abgabetermin: Montag, 12.11.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 5

(4 Punkte)

Sei $M(n, \mathbb{C})$ die $\mathbb{C}$ -Algebra aller komplexen $n \times n$ -Matrizen. Zeigen Sie, dass $\Delta_{M(n, \mathbb{C})} = \emptyset$ ist für $n \geq 2$.

Aufgabe 6

(2+2=4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^* -Algebra und sei $a \in \mathcal{A}$. Man zeige:

- (a) Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\sigma(x) \subset \sigma(a) + D_\epsilon(0)$ für alle $x \in \mathcal{A}$ mit $\|x - a\| < \delta$.

Hinweis: Für $\lambda \notin \sigma(a)$ gilt $\lambda - x = (\lambda - a)(e - R(\lambda, a)(x - a))$.

- (b) Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $\sigma(a) \subset \sigma(x) + D_\epsilon(0)$ für alle normalen $x \in \mathcal{A}$ mit $\|x - a\| < \delta$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für normale Elemente x und $\lambda \notin \sigma(x)$ die Gleichheit $\|R(\lambda, x)\| = \text{dist}(\lambda, \sigma(x))^{-1}$ erfüllt ist und benutzen Sie dann den Hinweis von (a) mit vertauschten Rollen von a und x .

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $C(K)$ die Banachalgebra aller stetigen $\mathbb{C}$ -wertigen Funktionen auf K . Für $\lambda \in K$ bezeichne $\delta_\lambda : C(K) \rightarrow \mathbb{C}$, $\delta_\lambda(f) = f(\lambda)$ die Punktauswertung in λ , und für $M \subset C(K)$ sei $Z(M) = \{z \in K ; f(z) = 0 \text{ für alle } f \in M\}$.

Aufgabe 7

(2+2+2+2(*) = 6+2(*) Punkte)

Man zeige:

- (a) Ist $I \subset C(K)$ ein Ideal so, dass $f_1, \dots, f_r \in I$ existieren mit $Z(\{f_1, \dots, f_r\}) = \emptyset$, so ist $I = C(K)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $g_i = \overline{f_i} / \sum_{j=1}^r |f_j|^2$.

- (b) Ist $I \subsetneq C(K)$ ein echtes Ideal, so ist $Z(I) \neq \emptyset$.

- (c) Ist $M \subset C(K)$ ein maximales Ideal, so gibt es $\lambda \in K$ mit $M = \{f \in C(K) ; f(\lambda) = 0\}$. Folgern Sie, dass $\Delta_{C(K)} = \{\delta_\lambda ; \lambda \in K\}$ gilt.

- (d) Die Abbildung $\varrho : K \rightarrow \Delta_{C(K)}$, $\lambda \mapsto \delta_\lambda$ ist ein Homöomorphismus, wenn man $\Delta_{C(K)}$ mit seiner Gelfandtopologie versieht. Zeigen Sie ferner, dass der Gelfandhomomorphismus $\Gamma : C(K) \rightarrow C(\Delta_{C(K)})$ durch $\Gamma(f) = f \circ \varrho^{-1}$ gegeben ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 8

(4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine C^* -Algebra und sei $p \in \mathcal{A}$ ein Element mit $p^2 = p$ und $p^*p = pp^*$. Zeigen Sie, dass $p = p^*$ ist.

<http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre>