



Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren
Wintersemester 2007/2008

Blatt 3

Abgabetermin: Montag, 19.11.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 9

(4 Punkte)

Seien $\mathcal{A}$ eine unitale C^* -Algebra und $u \in \mathcal{A}$ unitär mit $\|u - e\| < 2$. Man zeige, dass dann ein selbstadjungiertes Element $a \in \mathcal{A}$ existiert mit $e^{ia} = u$.

Aufgabe 10

(4 Punkte)

Seien $\mathcal{A}$ eine C^* -Algebra und $x \in \mathcal{A}$. Man zeige: Ist $f \in C(\sigma(x^*x) \cup \{0\})$ mit $f(0) = 0$, so gilt $xf(x^*x) = f(xx^*)x$.

Aufgabe 11

(4 Punkte)

Seien $\mathcal{A}$ eine unitale C^* -Algebra und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer abgeschlossenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Man zeige, dass die Abbildung

$$\{x \in \mathcal{A} ; x \text{ normal mit } \sigma(x) \subset \Omega\} \rightarrow \mathcal{A}, x \mapsto f(x)$$

stetig ist.

Hinweis: Man benutze den Satz von Stone-Weierstraß, um die Behauptung auf den Fall spezieller Funktionen f zu reduzieren.

Aufgabe 12

(6 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine C^* -Algebra und seien $a, b, x \in \mathcal{A}$ mit $0 \leq a \leq b$. Man zeige:

(a) $a \leq \|a\|e$ (in $\tilde{\mathcal{A}}$)

(b) $\|a\| \leq \|b\|$

(c) $x^*ax \leq x^*bx$

(d) $\|a^{\frac{1}{2}}x\| \leq \|b^{\frac{1}{2}}x\|$.
