UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dr. Christoph Barbian

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren

Wintersemester 2007/2008

Blatt 4 Abgabetermin: Montag, 26.11.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 13 (4+2(*) Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und seien $a, b \in \mathcal{A}$.

(a) Sei zusätzlich $ab = ba$. Zeigen Sie:

(i) Sind $a \geq 0$ und $b \geq 0$, so ist auch $ab \geq 0$.

(ii) Gilt $0 \leq a \leq b$, so ist $a^2 \leq b^2$.

(b) Gelten die Aussagen in (a) auch ohne die Voraussetzung, dass $ab = ba$ ist?
Hinweis: Würde (ii) gelten, so würde folgen, dass $(a + \varepsilon b)^2 \geq a^2$ *für alle* $\varepsilon > 0$ *und beliebige* $a, b \geq 0$ *gilt. Berechnen Sie* $ab + ba$ *für die Matrizen*

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14 (4x1=4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und seien $x, y \in \mathcal{A}^{-1}$ mit $0 \leq x \leq y$. Zeigen Sie:

(a) $y^{-\frac{1}{2}} x y^{-\frac{1}{2}} \leq e$

(b) $\|y^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}\| \leq 1$

(c) $x^{\frac{1}{2}} y^{-1} x^{\frac{1}{2}} \leq e$

(d) $y^{-1} \leq x^{-1}$.

Aufgabe 15 **(3+2=5 Punkte)**

Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und seien $x, y \in \mathcal{A}$ mit $0 \le x \le y$.

(a) Nehmen Sie zusätzlich an, dass $\mathcal{A}$ unital ist und dass $x, y \in \mathcal{A}^{-1}$ gilt. Zeigen Sie:

   (i) $\|x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}\| \le 1$

   (ii) $\sigma(y^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{4}}) \subset [0,1]$

   (iii) $x^{\frac{1}{2}} \le y^{\frac{1}{2}}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Ungleichung $x^{\frac{1}{2}} \le y^{\frac{1}{2}}$ auch ohne die in (a) gestellten Zusatzvoraussetzungen richtig bleibt.
Hinweis: Aufgabe 11.

Aufgabe 16 **(4+4(*) Punkte)**

Sei $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein surjektiver $*$-Homomorphismus zwischen zwei unitalen C^*-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Für jedes positive (selbstadjungierte) Element $b \in \mathcal{B}$ existiert ein positives (selbstadjungiertes) Element $a \in \mathcal{A}$ mit $\Phi(a) = b$.

(b) Für jedes positive (selbstadjungierte) invertierbare Element $b \in \mathcal{B}$ existiert ein positives (selbstadjungiertes) invertierbares Element $a \in \mathcal{A}$ mit $\Phi(a) = b$.
