



Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren
Wintersemester 2007/2008

Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 03.12.2007, vor der Vorlesung

Sei im folgenden immer H ein komplexer Hilbertraum.

Aufgabe 17

(1+2+1=4 Punkte)

Sei $T \in L(H)$ ein Operator mit Polarzerlegung $T = W|T|$. Man zeige:

- (a) Ist T invertierbar, so ist W unitär.
 - (b) Ist T nach unten beschränkt (d.h. es gibt ein $c > 0$ mit $\|Tx\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in H$), so gilt $W, |T| \in C^*(T)$.
 - (c) Ist T normal, so gilt $W|T| = |T|W$.
-

Aufgabe 18

(1+1+2=4 Punkte)

Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum und sei $T \in L(H)$. Man zeige:

- (a) Es gilt $TM \subset M$ genau dann, wenn $P_M T P_M = T P_M$.
 - (b) Es sind äquivalent:
 - (i) $TM \subset M$ und $TM^\perp \subset M^\perp$.
 - (ii) $TM \subset M$ und $T^*M \subset M$.
 - (iii) $P_M T = T P_M$.
 - (c) $P_{\ker T}$ und $P_{\overline{\operatorname{Im} T}}$ liegen in der von T erzeugten von Neumann-Algebra.
-

Aufgabe 19

(4 Punkte)

Sei $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine unitale C^* -Algebra. Ein Vektor $\xi \in H$ heiße zyklisch für $\mathcal{A}$, falls $\overline{\mathcal{A}\xi} = H$ gilt, und separierend für $\mathcal{A}$, falls aus $A \in \mathcal{A}$ und $A\xi = 0$ schon $A = 0$ folgt. Zeigen Sie, dass ein Vektor ξ genau dann zyklisch für $\mathcal{A}$ ist, wenn er separierend für $\mathcal{A}'$ ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 20**(2+1+1+2(*) = 4+2(*) Punkte)**

- (a) Seien $(S_i)_{i \in I}$ und $(T_i)_{i \in I}$ SOT-konvergente Netze in $L(H)$ mit $(S_i) \xrightarrow{\text{SOT}} S$, $(T_i) \xrightarrow{\text{SOT}} T$ und $\|S_i\| \leq 1$ für alle $i \in I$. Zeigen Sie, dass $(S_i T_i) \xrightarrow{\text{SOT}} ST$ gilt.
- (b) Für jedes $T \in L(H)$ bilden die Mengen

$$\{S \in L(H) ; \max_{i=1, \dots, n} \|Sx_i - Tx_i\| < \varepsilon\}$$

mit $n \geq 1$, linear unabhängigen $x_1, \dots, x_n \in H$ und $\varepsilon > 0$ eine SOT-Umgebungsbasis von T .

- (c) Ist $\dim H = \infty$ und sind $x_1, \dots, x_n \in H$ linear unabhängig, so gibt es zu jedem $T \in L(H)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ Vektoren $y_1, \dots, y_n \in H$ so, dass $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ linear unabhängig sind und $\|Tx_i - y_i\| < \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n$ gilt.
- (d) Sei $\dim H = \infty$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{S \in L(H) ; S^2 = 0\} \subset L(H)$ SOT-dicht ist, und schließen Sie, dass die Multiplikation auf $L(H)$ weder SOT- noch WOT-stetig ist.

Aufgabe 21**(2(*)+2(*)+2(*) = 6(*) Punkte)**

- (a) Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra. Man zeige: Für $x \in \mathcal{A}$ ist $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ wohldefiniert. Für $x, y \in \mathcal{A}$ mit $xy = yx$ ist $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
- (b) Ist $\mathcal{A}$ eine C^* -Algebra und $x \in \mathcal{A}$ normal, so ist $\exp(\lambda x^* - \bar{\lambda}x)$ unitär für jede komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (c) Sind $\mathcal{A}$ eine C^* -Algebra, $x \in \mathcal{A}$ normal und $y \in \mathcal{A}$ mit $xy = yx$, so definiert

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}, \quad g(\lambda) = \exp(\lambda x^* - \bar{\lambda}x)y \exp(\lambda x^* - \bar{\lambda}x)^*$$

eine beschränkte ($\mathcal{A}$ -wertige) holomorphe Funktion. Schließen Sie, dass $x^*y = yx^*$ gilt.