



Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren
Wintersemester 2007/2008

Blatt 6

Abgabetermin: Montag, 10.12.2007, vor der Vorlesung

Sei im Folgenden H ein komplexer Hilbertraum.

Aufgabe 22 (4 Punkte)

Sei $T \in L(H)$. Zeigen Sie, dass genau dann $T \in \mathcal{C}^1(H)$ gilt, wenn $(\operatorname{Re} T)^\pm \in \mathcal{C}^1(H)$ und $(\operatorname{Im} T)^\pm \in \mathcal{C}^1(H)$ gilt.

Aufgabe 23 (4 Punkte)

Sei $T \in L(H)$. Zeigen Sie, dass genau dann $T \in \mathcal{C}^1(H)$ gilt, wenn

$$\sum_{i \in I} |\langle Te_i, e_i \rangle| < \infty$$

für jede Orthonormalbasis $(e_i)_{i \in I}$ von H gilt.

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Sei $\dim H = \infty$ und sei $T \in L(H)$ kompakt. Zeigen Sie, dass eine monoton fallende Nullfolge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und orthonormale Folgen $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H existieren mit

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n \otimes f_n.$$

Aufgabe 25 (2+2+3x2(*) = 4+6(*) Punkte)

Seien $\mathcal{A}$ eine C^* -Algebra und $\tau : \mathcal{A}_+ \rightarrow [0, \infty]$ eine Abbildung mit

$$\tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b), \quad \tau(\alpha a) = \alpha \tau(a) \quad \text{und} \quad \tau(c^*c) = \tau(cc^*)$$

für alle $a, b \in \mathcal{A}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und $c \in \mathcal{A}$. Man zeige:

- (a) $J = \{a \in \mathcal{A} ; \tau(a^*a) < \infty\} \subset \mathcal{A}$ ist ein selbstadjungiertes Ideal.
Hinweis: $(a+b)^*(a+b) \leq 2a^*a + 2b^*b$ und $(ca)^*(ca) \leq \|c\|^2 a^*a$.
- (b) Für $I_+ = \{a \in \mathcal{A}_+ ; \tau(a) < \infty\}$ und $I = \operatorname{LH}\{ab ; a, b \in J\}$ gilt $I = \operatorname{LH}(I_+)$.
- (c) Es gilt $I_+ = I \cap \mathcal{A}_+$.
- (d) $\tau|_{I_+}$ hat eine eindeutige Fortsetzung zu einer Linearform $\hat{\tau} : I \rightarrow \mathbb{C}$.
- (e) Es ist $\hat{\tau}(xa) = \hat{\tau}(ax)$ für alle $x \in \mathcal{A}$ und $a \in I$.