UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dr. Christoph Barbian

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren

Wintersemester 2007/2008

Blatt 7 Abgabetermin: Montag, 17.12.2007, vor der Vorlesung

Aufgabe 26 (2+2=4 Punkte)

Für $T \in L(l^2)$ sei

$$a(T) = (\langle Te_n, e_m\rangle)_{m,n\geq 0}\,.$$

Hierbei bezeichnet $(e_n)_{n\geq 0}$ die kanonische Orthonormalbasis von l^2, das heißt $e_n = (\delta_{ni})_{i\geq 0}$. Man zeige:

(a) Für $T \in L(l^2)$ und $(a_{mn})_{m,n\geq 0} = a(T)$ gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} |a_{mn}|^2 \leq \|T\|^2 \ , \ \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{mn}|^2 \leq \|T\|^2.$$

(b) Die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{C}^2(l^2) \to l^2(\mathbb{N}^2) \ , \ T \mapsto a(T)$$

ist ein wohldefinierter isometrischer Isomorphismus zwischen Hilberträumen.

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ eine C^*-Unteralgebra einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$, und sei $J \subset \mathcal{A}$ ein abgeschlossenes Ideal. Man zeige, dass $\mathcal{B} + J \subset \mathcal{A}$ eine C^*-Teilalgebra ist und dass $(\mathcal{B} + J)/J \simeq \mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap J)$ als C^*-Algebren gilt.

Aufgabe 28 (2+2+1=5 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und seien $x, a \in \mathcal{A}$ mit $x^*x \leq a$.

(a) Sei $(g_n)_n$ die durch

$$g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \ , \ g_n(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t + \frac{1}{n}}}$$

definierte Funktionenfolge. Zeigen Sie, dass dann für jedes $\alpha > 0$ die Funktionenfolge $(t^\alpha g_n)_n$ gleichmäßig auf jedem Intervall $[0, R]$ $(R > 0)$ gegen die Funktion t^α konvergiert.

Hinweis: Die Folge $(t^\alpha g_n)_{n\geq 1}$ wächst monoton, und zu $\varepsilon > 0, x \in [0, R]$ existieren $n_x \geq 1$ und eine Umgebung U_x von x mit $t^\alpha g_{n_x}(t) > t^\alpha - \varepsilon$ für alle $t \in U_x$.

(bitte wenden)

(b) Definiere $b_n = x(a + \frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}}$ und $f_n(t) = t^{\frac{1}{4}} g_n(t)$ für $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\|b_n - b_m\|^2 \leq \|f_n - f_m\|^2_{\infty,[0,\|a\|]}$$

für alle $n, m \geq 1$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass ein $b \in \mathcal{A}$ existiert mit $x = ba^{\frac{1}{4}}$.

Aufgabe 29 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $J \subset \mathcal{A}$ ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$.

(a) Seien $a \in J$ und $c \in \mathcal{A}$ mit $0 \leq c \leq a$. Zeigen Sie, dass $c \in J$ gilt.

(b) Zeigen Sie, ohne den entsprechenden Satz aus der Vorlesung zu benutzen, dass J selbstadjungiert ist.

Hinweis: Aufgabe 28.

---

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre