



Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren
Wintersemester 2007/2008

Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 07.01.2008, vor der Vorlesung

Im Folgenden seien H, K komplexe Hilberträume.

Aufgabe 30

(2+2=4 Punkte)

Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilräume von H mit $M_i \perp M_j$ für alle $i \neq j$, und sei

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \overline{\text{LH}} \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right).$$

Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $\bigoplus_{i \in I} M_i = \{ \sum_{i \in I} x_i ; x_i \in M_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } \sum_{i \in I} \|x_i\|^2 < \infty \}$.
- (b) Sind $T_i \in L(M_i)$ ($i \in I$) stetige Operatoren mit $s = \sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$, so definiert

$$T \left(\sum_{i \in I} x_i \right) = \sum_{i \in I} T_i x_i \quad , \text{ falls } x_i \in M_i \text{ und } \sum_{i \in I} \|x_i\|^2 < \infty,$$

einen Operator $T \in L(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ mit $\|T\| = s$.

Aufgabe 31

(5 Punkte)

Sei $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine selbstadjungierte Teilalgebra. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $\mathcal{A}$ ist WOT-abgeschlossen in $L(H)$.
- (ii) $\mathcal{A}$ ist τ_{w^*} -abgeschlossen in $L(H)$.
- (iii) $\text{ball}(\mathcal{A}) \subset L(H)$ ist τ_{w^*} -kompakt.

Hinweis: Dichtheitssatz von Kaplansky.

(bitte wenden)

Aufgabe 32**(2+2+3(*)=4+3(*) Punkte)**

Sei im Folgenden $\mathcal{W} \subset L(H)$ eine selbstadjungierte, WOT-abgeschlossene Teilalgebra, und sei $M = \left(\bigcap_{T \in \mathcal{W}} \ker T\right)^\perp$. Man zeige

- (a) $\mathcal{W}|_M \subset L(M)$ ist eine selbstadjungierte, WOT-abgeschlossene Teilalgebra.
- (b) Es gibt eine Orthogonalprojektion $P \in \mathcal{W}$ mit $A = PA = AP$ für alle $A \in \mathcal{W}$.
Hinweis: Betrachte P_M .
- (c) Enthält $\mathcal{W}$ zusammen mit jedem Operator $C \in \mathcal{W}$ auch jeden Operator $A \in L(H)$ mit $0 \leq A \leq C$, so ist $\mathcal{W} = PL(H)P$ mit einer geeigneten Orthogonalprojektion P .
Folgern Sie, dass $L(H)$ keine τ_w^* -abgeschlossenen Ideale $\{0\} \neq J \neq L(H)$ enthält.

Aufgabe 33**(2+2=4 Punkte)**

Sei $\pi : L(H) \rightarrow L(K)$ ein $*$ -Homomorphismus. Man zeige:

- (a) Sind $v \in H$ und $w \in \pi(v \otimes v)K$ Einheitsvektoren, so gilt $\|\pi(A)w\| = \|Av\|$ für alle $A \in L(H)$.
- (b) Ist $\pi|_{\mathcal{K}(H)} \neq 0$ und $\mathcal{K}(K) \subset \text{Im } \pi$, so existiert ein unitärer Operator $U : K \rightarrow H$ mit $\pi(A) = U^*AU$ für alle $A \in L(H)$.

*Frohe Weihnachten
und
einen guten Rutsch ins neue Jahr!*

<http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre>