



Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren
Wintersemester 2007/2008

Blatt 9

Abgabetermin: Montag, 14.01.2008, vor der Vorlesung

Im Folgenden seien H, K komplexe Hilberträume. Wir nennen eine Teilalgebra $\{0\} \neq \mathcal{A} \subset L(H)$ irreduzibel, falls $\text{Lat}(\mathcal{A}) = \{\{0\}, H\}$ gilt.

Aufgabe 34

(2+2=4 Punkte)

Sei $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine irreduzible, abgeschlossene Teilalgebra. Zeigen Sie:

- (a) $\mathcal{A}^* \subset L(H)$ ist eine irreduzible Teilalgebra.
 - (b) Gibt es Vektoren $x_0, y_0 \in H \setminus \{0\}$ mit $x_0 \otimes y_0 \in \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{K}(H) \subset \mathcal{A}$.
Hinweis: Beweis von Satz 6.5.
-

Aufgabe 35

(2+1+1+2=6 Punkte)

Sei $\dim(H) < \infty$ und $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine irreduzible Teilalgebra. Zeigen Sie:

- (a) Jeder Operator $T \in \mathcal{A}' \setminus \{0\}$ ist invertierbar. Schließen Sie, dass $\mathcal{A}' = \mathbb{C} \cdot 1_H$ gilt.
 - (b) Ist $\dim(H) > 1$, so gibt es einen nicht invertierbaren Operator $T_0 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$.
 - (c) Für T_0 wie in (b) ist $(T_0 \mathcal{A})|_{\text{Im } T_0} \subset L(\text{Im } T_0)$ eine irreduzible Teilalgebra.
 - (d) Es gilt $\mathcal{A} = L(H)$.
Hinweis: Induktion nach $\dim(H)$ und Teil (b).
-

Aufgabe 36

(3+1=4 Punkte)

- (a) Seien $A, B \in L(H)$ mit $\text{Im } A \subset \text{Im } B$. Zeigen Sie, dass ein Operator $C \in L(H)$ existiert mit $A = BC$.
 - (b) Sei $\{0\} \neq J \subset L(H)$ ein abgeschlossenes Ideal. Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}(H) \subset J$ gilt.
-

(bitte wenden)

Aufgabe 37**(4x1=4 Punkte)**

Sei $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine C^* -Teilalgebra mit $\mathcal{K}(H) \subset \mathcal{A}$ und sei $\pi : \mathcal{A} \rightarrow L(K)$ eine Darstellung. Zeigen Sie:

- (a) Es ist $K_1 := \overline{\text{LH}}\left(\bigcup_{T \in \mathcal{K}(H)} \pi(T)K\right) \in \text{Lat}(\pi)$.
- (b) Für $K_0 := K_1^\perp \in \text{Lat}(\pi)$ gilt $(\pi|_{K_0})(\mathcal{K}(H)) = \{0\}$.
- (c) Es gibt eine Indexmenge I so, dass $\pi|_{K_1} : \mathcal{K}(H) \rightarrow L(K_1)$ äquivalent zu der Darstellung

$$\bigoplus_{i \in I} \text{id} : \mathcal{K}(H) \rightarrow L\left(\bigoplus_{i \in I} H\right)$$

ist.

- (d) Teil (c) bleibt richtig, wenn man $\mathcal{K}(H)$ durch $\mathcal{A}$ ersetzt.

<http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre>