**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dr. Christoph Barbian

# Übungen zur Vorlesung
# Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren

Wintersemester 2007/2008

**Blatt 10** Abgabetermin: Montag, 21.01.2008, vor der Vorlesung

---

*Sei $\mathcal{A}$ eine unitale $C^*$-Algebra.*

---

**Aufgabe 38** **(2+1+2=5 Punkte)**

Sei $f$ ein Zustand von $\mathcal{A}$ und $\pi_f : \mathcal{A} \to L(H_f)$ die GNS-Darstellung von $f$. Man zeige:

(a) Für ein abgeschlossenes Ideal $I \subset \mathcal{A}$ gilt: $I \subset \ker \pi_f \quad \Leftrightarrow \quad I \subset \ker f$.

(b) Ist $f$ treu (das heißt, $\ker f \cap \mathcal{A}_+ = \{0\}$), so ist $\ker \pi_f = \{0\}$.

(c) Ist $\varrho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ein $*$-Isomorphismus mit $f(\varrho(x)) = f(x)$ für $x \in \mathcal{A}$, so sind die Darstellungen $\pi_f \circ \varrho$ und $\pi_f$ äquivalent.
*Hinweis: $\varrho$ induziert einen unitären Operator auf $H_f$.*

---

**Aufgabe 39** **(4 Punkte)**

Seien $\pi_i : \mathcal{A} \to L(H_i)$ $(i = 1, 2)$ Darstellungen von $\mathcal{A}$ mit zyklischen Vektoren $\xi_i \in H_i$ so, dass $\langle \pi_1(x)\xi_1, \xi_1\rangle = \langle \pi_2(x)\xi_2, \xi_2\rangle$ für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt. Zeigen Sie, dass $\pi_1$ und $\pi_2$ äquivalent sind.

---

**Aufgabe 40** **(2+2=4 Punkte)**

Sei $A = \mathbb{C}[x]$ die Algebra aller Polynome in einer reellen Variablen mit komplexen Koeffizienten. Versehe $A$ mit der Norm $\|p\| = \sup_{0 \le t \le 1} |p(t)|$ und der Involution $p^*(t) = \overline{p(t)}$. Man zeige:

(a) $A$ erfüllt alle Eigenschaften einer $C^*$-Algebra bis auf Vollständigkeit.

(b) $f : A \to \mathbb{C}$ , $p \mapsto p(2)$ ist eine unstetige Linearform auf $A$ mit $f(p^*p) \ge 0$ für alle $p \in A$.

---

(bitte wenden)

**Aufgabe 41** **(5x2(*)=10(*) Punkte)**

Sei $E = \mathcal{A}_{sa}$ aufgefasst als reeller Banachraum (bezüglich der von $\mathcal{A}$ induzierten Norm). Sei $S(\mathcal{A})$ der Zustandsraum von $\mathcal{A}$ und $S = S(\mathcal{A})_{|E}$. Man zeige:

(a) $S \subset E'$ besteht genau aus den reellen Linearformen $f : E \to \mathbb{R}$ mit $f(e) = 1$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{A}_+$.

(b) $S \subset (E', \tau_{w^*})$ ist konvex und kompakt.

(c) $\mathrm{ball}(E') = \overline{C(S \cup (-S))}^{\tau_{w^*}} = \{tf - (1-t)g \ ; \ t \in [0,1] \text{ und } f, g \in S\}$.

(d) Für jede gegebene stetige Linearform $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ gibt es positive Linearformen $f_1, \ldots, f_4 : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$.

(e) Zu jeder stetigen Linearform $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ existieren eine Darstellung $\pi : \mathcal{A} \to L(H)$ und Vektoren $\xi, \eta \in H$ mit $f(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle$ für alle $x \in \mathcal{A}$.

---