



Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren
Wintersemester 2007/2008

Blatt 11

Abgabetermin: Montag, 28.01.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 42

(4 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine C^* -Algebra, und sei $x \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $x \geq 0$
- (ii) $\pi(x) \geq 0$ für jede Darstellung $\pi : \mathcal{A} \rightarrow L(H)$
- (iii) $f(x) \geq 0$ für jede positive Linearform $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$.

Aufgabe 43

(4 Punkte)

Sei $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ eine positive Linearform auf einer C^* -Algebra $\mathcal{A}$, und sei $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine Matrix in $M(n, \mathcal{A})_+$. Zeigen Sie, dass $(f(a_{ij}))_{i,j=1}^n \in M(n, \mathbb{C})_+$ gilt.

Hinweis: GNS-Darstellung.

Aufgabe 44

(4 Punkte)

Sei $h \in \mathcal{A}_+$ ein positives Element in einer C^* -Algebra $\mathcal{A}$, und seien Funktionen f_n definiert durch

$$f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \frac{t}{\frac{1}{n} + t} \quad (n \geq 1).$$

Man zeige, dass

$$J = \{x \in \mathcal{A} ; \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(h)x = x\} \subset \mathcal{A}$$

ein abgeschlossenes Rechtsideal mit $h \in J$ ist.

Aufgabe 45

(3x2=6 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine C^* -Algebra. Zeigen Sie:

- (a) Für Elemente $a, h \in \mathcal{A}$ mit $0 \leq a \leq h$ gilt $a \in \overline{h\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{A}h}$.
Hinweis: Aufgabe 28(c).
- (b) Ist $\mathcal{A}$ separabel, so existiert ein $h \in \mathcal{A}_+$ mit $\mathcal{A} = \overline{h\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{A}h}$.
Hinweis: Definieren Sie $h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^2}$ mit geeigneten h_n .
- (c) Ist $\mathcal{A}$ separabel, so gibt es eine abzählbare approximative Eins $(e_n)_{n \geq 1}$ für $\mathcal{A}$ mit $e_n e_m = e_m e_n$ für alle $n, m \geq 1$.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 44.