



Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren
Wintersemester 2007/2008

Blatt 12

Abgabetermin: Montag, 04.02.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 46

(4 Punkte)

Sei \mathcal{A} eine kommutative C^* -Algebra mit Eins. Zeigen Sie:

$$\Delta_{\mathcal{A}} = \{f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} ; f \text{ reiner Zustand von } \mathcal{A}\}.$$

Aufgabe 47

(1+3=4 Punkte)

Sei \mathcal{A} eine C^* -Algebra ohne Eins und sei $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Zustand, d.h. eine positive Linearform mit $\|f\| = 1$. Zeigen Sie:

- (a) f hat eine eindeutige Fortsetzung zu einem Zustand $F : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{C}$.
 - (b) Ist $(e_\lambda)_\lambda$ eine approximative Eins für \mathcal{A} und bezeichnet $\pi_F : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow L(H_F)$ die GNS-Darstellung von F , so ist $SOT - \lim_\lambda \pi_F(e_\lambda) = 1_{H_F}$.
-

Aufgabe 48

(1+2+2=5 Punkte)

Sei $S \subset \mathcal{A}$ ein Operatorsystem in einer unitalen C^* -Algebra \mathcal{A} und sei $\varphi : S \rightarrow \mathbb{C}$ eine positive Linearform. Zeigen Sie:

- (a) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ für alle $a \in S$.
 - (b) $\|\varphi\| = \varphi(e)$.
Hinweis: Wähle zu $a \in \mathcal{A}$ ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und $|\varphi(a)| = \varphi(\lambda a)$.
 - (c) φ hat eine Fortsetzung zu einer positiven Linearform $\hat{\varphi} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$.
-

Aufgabe 49

(4 Punkte)

Sei H ein Hilbertraum. Der numerische Radius eines Operators $T \in L(H)$ ist definiert als

$$w(T) = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| ; x \in H \text{ mit } \|x\| = 1\}.$$

Zeigen Sie: Ist $\varphi : S \rightarrow L(H)$ eine positive lineare Abbildung mit $\varphi(e) = 1_H$ auf einem Operatorsystem $S \subset \mathcal{A}$, so gilt $w(\varphi(a)) \leq \|a\|$ für alle $a \in S$.
