UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dr. Christoph Barbian

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren
Wintersemester 2007/2008

Blatt 13 Abgabetermin: Montag, 11.02.2008, vor der Vorlesung

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unitale C^*-Algebren und H ein komplexer Hilbertraum.

Aufgabe 50 (2+2=4 Punkte)

Sei $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine 2-positive Abbildung. Man zeige für alle $a, b \in \mathcal{A}$:

(a) $\varphi(a)^*\varphi(a) \leq \|\varphi(1)\|\varphi(a^*a)$.

(b) $\|\varphi(a^*b)\|^2 \leq \|\varphi(a^*a)\|\|\varphi(b^*b)\|$.

Hinweis: Lemma 10.3

Aufgabe 51 (4 Punkte)

Sei $(a_{ij}) \in M(n, \mathcal{A})$ positiv. Zeigen Sie, dass

$$\max_{1 \leq i,j \leq n} \|a_{ij}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|a_{ii}\|.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 2$.

Aufgabe 52 (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen vollständig positiv sind:

(a) $\mathrm{tr} : M(n, \mathcal{A}) \to \mathcal{A}\ ,\ (a_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

(b) $\sigma : M(n, \mathcal{A}) \to \mathcal{A}\ ,\ (a_{ij}) \mapsto \sum_{i,j=1}^n a_{ij}$.

(bitte wenden)

Sei $T \in L(H)$ und sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Man nennt K spektral für T, wenn $\sigma(T) \subset K$ ist und $\|r(T)\| \leq \|r\|_{\infty,K}$ für alle rationalen Funktionen r auf K gilt, das heißt für alle Funktionen $r : K \to \mathbb{C}$, $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $p, q \in \mathbb{C}[z]$ mit $q(z) \neq 0$ für alle $z \in K$.

Aufgabe 53 **(2+2=4 Punkte)**

Sei $T \in L(H)$, $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $\mathrm{Rat}(K)$ die Algebra aller rationalen Funktionen auf K, aufgefasst als Operatorraum in $C(K)$. Man zeige:

(a) K ist spektral für T genau dann, wenn $\sigma(T) \subset K$ ist und

$$\varrho : \mathrm{Rat}(K) + \mathrm{Rat}(K)^* \to L(H)\ ,\ r + \overline{s} \mapsto r(T) + s(T)^*$$

eine wohldefinierte positive lineare Abbildung ist.

(b) Ist $\overline{\mathrm{Rat}(K)} = C(K)$, so ist K spektral für T genau dann, wenn T normal und $\sigma(T) \subset K$ ist.

---

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre