UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dr. Christoph Barbian

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Operatorentheorie und Operatoralgebren

Wintersemester 2007/2008

Blatt 14 Abgabetermin: Montag, 18.02.2008, vor der Vorlesung

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unitale C^*-Algebren und $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ komplexe Hilberträume.

Aufgabe 54(*) (4 Punkte)

Sei $\pi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{K})$ die minimale Stinespring-Darstellung einer vollständig positiven Abbildung $\varphi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H})$. Zeigen Sie, dass genau dann $\ker \varphi = \ker \pi$ ist, wenn $\ker \varphi \subset \mathcal{A}$ ein Ideal ist.

Aufgabe 55(*) (4 Punkte)

Sei $\varphi : S \to \mathcal{B}$ eine positive lineare Abbildung auf einem Operatorsystem $S \subset \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass φ eine positive Fortsetzung $\hat{\varphi} : \overline{S} \to \mathcal{B}$ hat.

Hinweis: Reduzieren Sie die Aussage mit Hilfe des Satzes von Gelfand-Naimark-Segal auf den Fall $\mathcal{B} = \mathbb{C}$.

Aufgabe 56(*) (3x2=6 Punkte)

Sei $T \in L(\mathcal{H})$ und $K \subset \mathbb{C}$ spektral für T. Man zeige:

(a) Die Abbildung $r : \mathrm{Rat}(K) \to C(\partial K)$, $f \mapsto f_{|\partial K}$ ist isometrisch.

(b) Ist $(\mathrm{Rat}(K) + \mathrm{Rat}(K)^*)_{|\partial K} \subset C(\partial K)$ dicht, so existiert eine positive lineare Abbildung $\varphi : C(\partial K) \to L(\mathcal{H})$ mit $\varphi(r_{|\partial K}) = r(T)$ für alle $r \in \mathrm{Rat}(K)$.

(c) In der Situation von (b) existiert ein Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ und ein normaler Operator $N \in L(\mathcal{K})$ mit

$$\sigma(N) \subset \partial K \quad \text{und} \quad r(T) = P_{\mathcal{H}} r(N)_{|\mathcal{H}} \quad (r \in \mathrm{Rat}(K)).$$

(bitte wenden)

Aufgabe 57(*) **(4 Punkte)**

Seien $S \in L(\mathcal{H})$ und $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(i) Es gibt eine positive lineare Abbildung $\varphi : C(K) \to L(\mathcal{H})$ mit $\varphi(1) = 1_{\mathcal{H}}$, $\varphi(z) = S$ und $\varphi(\overline{z}z) = S^*S$.

(ii) Es gibt einen normalen Operator $N \in L(\mathcal{K})$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ mit $\sigma(N) \subset K$ und $N\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ und $S = N_{|\mathcal{H}}$.

Hinweis zu (i) ⇒ (ii): Benutzen Sie die minimale Stinespring-Darstellung π von φ und berechnen Sie die Matrix von $\pi(z)^*\pi(z) \in L(\mathcal{K})$ bezüglich $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp}$.
