Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 & = & -1 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Lösung:

Wir schreiben das LGS in Matrixform und führen elementare Zeilenumformungen durch um Zeilenstufenform zu erreichen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{(II)\to(II)-3(I)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

Eine Lösungsvariable ist frei wählbar, es ist also (etwa) $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aus (II) ergibt sich

$$5x_2 - 5x_3 = 5 \;\Leftrightarrow\; x_2 = 1 + x_3.$$

Aus (I) ergibt sich

$$-x_1 + 2x_3 = -1 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 1 + 2x_3.$$

Folglich ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 2x_3 \\ 1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ;\; x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}.$$

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Ein Eigenwert ist eine negative ganze Zahl. Weitere Eigenwerte liegen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Lösung:

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_A. Dieses ergibt sich durch

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda E_3 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 3 & -1 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 3 & -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 + 9\lambda + 26.$$

Durch Probieren (beachte den Hinweis) findet man eine Nullstelle $\lambda_1 = -2$ von p_A. Durch Polynomdivision erhält man

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda + 26 = (\lambda + 2)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 13\right).$$

Weiterhin ist

$$\lambda^2 - 2\lambda + 13 = 0 \;\Leftrightarrow\; (\lambda - 1)^2 = -12 \;\Leftrightarrow\; \lambda - 1 = \pm\sqrt{12}i \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1 \pm \sqrt{12}i.$$

Die Eigenwerte von A sind also

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{12}i, \quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{12}i.$$

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Bestimmen Sie die inverse Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie damit die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

für eine gegebene Zahl $y \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wir berechnen die inverse Matrix mit elementaren Zeilenumformungen:

$$\begin{aligned}(A|E_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) &\xrightarrow{(II)\to(II)-2(I)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{(I)\to(I)+(II)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = \left(E_2|A^{-1}\right)\end{aligned}$$

Also ist A invertierbar mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Da A invertierbar ist, hat das LGS $A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ die eindeutige Lösung

$$x = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge ist somit

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Bestimmen Sie eine geschlossene Formel für die durch

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \ (n \geq 2)$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_n$.

Lösung:

Die charakteristische Gleichung der gegebenen Differenzengleichung ist

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Sie hat zwei verschiedende reelle Lösungen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$. Die gesuchte geschlossene Formel ist also

$$a_n = c_1 2^n + c_2 3^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

mit noch zu bestimmenden Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Aus den Anfangswerten ergibt sich:

$$0 = a_0 = c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad 1 = a_1 = 2c_1 + 3c_2.$$

Die erste Gleichung ergibt $c_1 = -c_2$ und eingesetzt in die zweite folgt $1 = -2c_2 + 3c_2 = c_2$. Folglich ist $c_2 = 1$ und $c_1 = -1$. Es ergibt sich somit

$$a_n = -2^n + 3^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Aufgabe 5 **(4+4=8 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(a)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{n^3 + 2n + 6} \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

Lösung:

(a) Es sei $a_n = \frac{n^2-3n+2}{n^3+2n+6}$ und $b_n = \frac{1}{n}$. Wegen

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{n^3 + 2n + 6} = \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^3}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \in]0, \infty[$$

haben $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nach dem Vergleichskriterium dasselbe Konvergenzverhalten. Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ bekanntlich divergent ist, ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

(b) Es sei $a_n = \frac{n}{3^n}$. Wegen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} < 1$$

ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium (sogar absolut) konvergent.

Aufgabe 6 **((2+2)+6=10 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\text{(i) } f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2+1} \qquad \text{(ii) } g(x) = e^{(e^x)}$$

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen und die (maximalen) Monotonieintervalle der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4.$$

Lösung:

(a) (i) Nach der Quotientenregel ist

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (x^2+1) - \sin x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}.$$

(ii) Nach der Kettenregel ist

$$g'(x) = e^{(e^x)} \cdot e^x = e^{(e^x+x)}.$$

(b) Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 60x^5 + 120x^4 + 60x^3 = 60x^3\left(x^2+2x+1\right) = 60x^3\,(x+1)^2\,.$$

Sie hat die Nullstellen -1 und 0 und das folgende Vorzeichenverhalten:

x		-1		0	
$f'(x)$	<0	0	<0	0	>0

Folglich ist f streng monoton fallend auf $]-\infty, 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0,\infty[$. Damit ist 0 die einzige lokale Extremstelle von f, es handelt sich dabei um eine lokale Minimumstelle.

Aufgabe 7 **(4+4=8 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2-9}\,dx \qquad \text{Hinweis: Partialbruchzerlegung}$$

(b)

$$\int_{1}^{2} \log x \cdot x\,dx \qquad \text{Hinweis: Partielle Integration}$$

Lösung:

(a) Durch Partialbruchzerlegung erhält man

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right).$$

Damit ist

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2-9}\,dx = \frac{1}{6}\Big[\log|x-3| - \log|x+3|\Big]_{-2}^{2} = \frac{1}{6}(\log 1 - \log 5 - \log 5 + \log 1) = -\frac{\log 5}{3}.$$

(b) Wir führen eine partielle Integration durch. Dabei ist $f(x) = \log x$ und $f'(x) = \frac{1}{x}$ sowie $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $g'(x) = x$. Es folgt

$$\int_{1}^{2} \log x \cdot x\,dx = \left[\log x \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2}_{=\frac{1}{2}x}\,dx = \left[\log x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\cdot\log 2 - \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 8 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ auf einem maximalen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit

$$y'(t) \;=\; \frac{-3t^2}{t^3+1} \cdot y(t) \;+\; t^3 - 1 \quad (t \in I) \quad \text{und} \quad y(0) = -2.$$

Lösung:

Wir betrachten zunächst die zugehörige homogene DGL

$$(\star)_h \quad y'(t) \;=\; f(t) \cdot y(t)$$

mit

$$f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \; f(t) = \frac{-3t^2}{t^3+1}.$$

(Beachte: Das Definitionsintervall von f wird so gewählt, dass es den Anfangswert $t_0 = 0$ enthält und so groß wie möglich ist.) Eine Stammfunktion zu f ist gegeben durch

$$A(t) = -\log\left(t^3+1\right) \quad (t \in]-1, \infty[) \,.$$

Die allgemeine Lösung von $(\star)_h$ ist damit gegeben durch

$$y_c^{(h)}(t) = c \cdot e^{A(t)} = c \cdot e^{-\log\left(t^3+1\right)} = c \cdot \frac{1}{t^3+1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Nun suchen wir eine spezielle Lösung y_s der inhomogenen DGL

$$(\star) \quad y'(t) \;=\; f(t) \cdot y(t) + b(t)$$

mit f wie zuvor und $b :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \; b(t) = t^3 - 1$. Wir finden y_s durch Variation der Konstanten, es ist

$$y_s = c(t) \cdot \frac{1}{t^3+1},$$

wobei $c = c(t)$ eine Stammfunktion zu

$$\frac{b(t)}{\left(\frac{1}{t^3+1}\right)} = (t^3-1)(t^3+1) = t^6 - 1$$

ist, also etwa $c(t) = \frac{1}{7}t^7 - t$. Wir haben also eine spezielle Lösung y_s von $(\star)$ durch

$$y_s(t) = \frac{\frac{1}{7}t^7 - t}{t^3+1}.$$

Alle Lösungen von $(\star)$ sind nun gegeben durch

$$y_c(t) = y_s(t) + y_c^{(h)}(t) = \frac{\frac{1}{7}t^7 - t + c}{t^3+1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Wegen der Anfangsbedingung

$$-2 = y_c(0) = \frac{\frac{1}{7}0^7 - 0 + c}{0^3+1} = c,$$

erhalten wir die gesuchte Funktion durch

$$y_{(-2)} :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \; t \mapsto \frac{\frac{1}{7}t^7 - t - 2}{t^3+1}.$$