Aufgabe 30

Wir betrachten linear rekursiv definierte Folgen der Ordnung 3.

(a) Für $a_0 = 4$, $a_1 = 6$, $a_2 = 10$ und $a_n = -a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4a_{n-3}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2(x+1) - 4(x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)(x+2)(x+1) = 0 \end{aligned}$$

als charakteristische Gleichung, deren Lösungen $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$ sind. Zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha + \beta + \gamma & = & 4 \\ -2\alpha - \beta + 2\gamma & = & 6 \\ 4\alpha + \beta + 4\gamma & = & 10 \end{array} \right.$$

und erhalten $\alpha = -1$, $\beta = 2$ sowie $\gamma = 3$. Die geschlossene Formel für $(a_n)_n$ lautet also

$$a_n = -(-2)^n + 2 \cdot (-1)^n + 3 \cdot 2^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(b) Für $a_0 = -1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -11$ und $a_n = 7a_{n-1} - 15a_{n-2} + 9a_{n-3}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)(x^2 - 6x + 9) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)(x-3)^2 = 0 \end{aligned}$$

als charakteristische Gleichung, deren Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ sind. Zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha + \beta & = & -1 \\ \alpha + 3\beta + 3\gamma & = & -2 \\ \alpha + 9\beta + 18\gamma & = & -11 \end{array} \right.$$

und erhalten $\alpha = 1$, $\beta = -2$ sowie $\gamma = -1$. Die geschlossene Formel für $(a_n)_n$ lautet also

$$a_n = 1 + (n-2) \cdot 3^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(c) Für $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 20$ und $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^3 = 0 \end{aligned}$$

als charakteristische Gleichung, deren Lösung $x = 2$ ist. Zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha & = & 1 \\ 2\alpha + 2\beta + 2\gamma & = & 2 \\ 4\alpha + 8\beta + 16\gamma & = & 20 \end{array} \right.$$

und erhalten $\alpha = 1$, $\beta = -2$ sowie $\gamma = 2$. Die geschlossene Formel für $(a_n)_n$ lautet also

$$a_n = (2n^2 - 2n + 1) \cdot 2^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$