UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dipl. Math. Dominik Faas

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2008/2009

Testat 1 vom 19.11.2008

Name:
Matrikelnummer:
Übungsgruppe:

Hinweise:

- Bei den folgenden Aufgaben ist immer jeweils genau eine Aussage richtig. Kreuzen Sie die richtige Aussage an.
- Die ersten 6 richtig gelösten Aufgaben sind die Voraussetzung dafür, Zusatzpunkte erzielen zu können. Jede weitere richtig gelöste Aufgabe bringt Ihnen dann 4 Zusatzpunkte für die Übungen. (Sie können in keinem Fall Minuspunkte erhalten.)

---

1. Ein homogenes lineares Gleichungssystem

☐ hat immer keine oder genau eine Lösung.

☐ hat immer keine oder unendlich viele Lösungen.

☒ hat immer genau eine oder unendlich viele Lösungen.

☐ kann keine, eine oder unendlich viele Lösungen haben.

Ein homogenes LGS hat immer die Lösung 0 (Nullvektor). Entweder hat es nur diese eine Lösung oder noch weitere und damit unendlich viele Lösungen.

---

2. Ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem

☐ hat immer keine oder genau eine Lösung.

☒ hat immer keine oder unendlich viele Lösungen.

☐ hat immer genau eine oder unendlich viele Lösungen.

☐ kann keine, eine oder unendlich viele Lösungen haben.

Bringt man ein unterbestimmtes LGS auf ZSF, so bleibt auf der linken Seite (mindestens) eine Nullzeile übrig. Je nachdem was rechts steht, hat das LGS dann keine Lösung oder es gibt (mindestens) eine frei wählbare Lösungsvariable (dann sind es unendlich viele Lösungen).

---

3. Sind zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so sind die Vektoren $x, y, x+y$

- [x] immer linear abhängig.
- [ ] immer linear unabhängig.
- [ ] genau dann linear abhängig, wenn $n \leq 2$ ist.
- [ ] genau dann linear abhängig, wenn x, y linear abhängig sind.

Eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors ist

$$1 \cdot x \;+\; 1 \cdot y \;+\; (-1) \cdot (x+y) \;= 0.$$

Damit sind $x, y, x+y$ immer linear abhängig.

---

4. Ist $A \in M(2 \times 3)$ und $B \in M(2 \times 4)$, so ist $A \cdot B$

- [ ] $\in M(3 \times 4)$.
- [ ] $\in M(4 \times 3)$.
- [ ] $\in M(2 \times 2)$.
- [x] nicht definiert.

Da die Spaltenzahl von A (diese ist $= 3$) ungleich der Zeilenzahl von B (diese ist $= 2$) ist, ist die Matrix $A \cdot B$ nicht definiert.

---

5. Die Multiplikation mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ spiegelt einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$

- [ ] an der x_2-Achse.
- [ ] an der 1.Winkelhalbierenden.
- [x] an der 2.Winkelhalbierenden.
- [ ] am Ursprung.

Es ist $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$. Beispielsweise wird $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ abgebildet. Dies entspricht der Spiegelung an der 2. Winkelhalbierenden.

---

6. Sind $A, B \in M(n \times n)$ gegeben, so ist die Matrix $A \cdot B$

- [ ] immer invertierbar.
- [ ] genau dann invertierbar, wenn A, B beide invertierbar sind, dann gilt $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$.
- [x] genau dann invertierbar, wenn A, B beide invertierbar sind, dann gilt $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
- [ ] genau dann invertierbar, wenn (mindestens) eine der Matrizen A und B invertierbar ist.

Es ist $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Mit Satz 2.15 folgt

$$A \cdot B \text{ invertierbar } \;\Leftrightarrow\; (\det(A) \neq 0 \;\underline{\text{und}}\; \det(B) \neq 0) \;\Leftrightarrow\; A, B \text{ beide invertierbar.}$$

Die Inverse von $A \cdot B$ muss $B^{-1} \cdot A^{-1}$ sein, denn es ist

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E_n.$$

---

7. Seien $A, L, P \in \mathbb{R}$. Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} A & P & 0 \\ L & L & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist

- ☐ $L(3A+1)$
- ☐ $L(3A-1)$
- ☒ $3L(A-P)$
- ☐ $3L(A+P)$

Nach der Regel von Sarrus (3×3-Matrix) ist

$$\det \begin{pmatrix} A & P & 0 \\ L & L & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A \cdot L \cdot 3 \;+\; P \cdot 0 \cdot 0 \;+\; 0 \cdot L \cdot 1 \;-\; 0 \cdot L \cdot 0 \;-\; 1 \cdot 0 \cdot A \;-\; 3 \cdot L \cdot P \;= 3L(A-P).$$

---

8. Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben, so sind die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

- ☐ immer linear abhängig.
- ☐ immer linear unabhängig.
- ☒ genau dann linear unabhängig, wenn a, b, c allesamt ungleich 0 sind.
- ☐ genau dann linear unabhängig, wenn (mindestens) eine der Zahlen a, b, c ungleich 0 ist.

Nach Satz 2.15 sind die Vektoren genau dann linear unabhängig, wenn $\det \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \neq 0$ ist. (Man nimmt dabei die Vektoren als Spalten.) Diese Determinante ist aber gerade $a \cdot b \cdot c$, denn die Determinante einer oberen Dreicksmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente. Es ist genau dann $a \cdot b \cdot c \neq 0$, wenn a, b, c allesamt $\neq 0$ sind.

---

9. Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & -1 \end{pmatrix}$ mit einer festen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist

- ☐ genau dann invertierbar, wenn $x \neq 1$ ist.
- ☐ genau dann invertierbar, wenn $x \neq -1$ ist.
- ☐ genau dann invertierbar, wenn $x \notin \{-1, 1\}$ ist.
- ☒ immer invertierbar.

Es ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) - x \cdot x = -1 - x^2 \neq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 2.15 ist die Matrix somit immer invertierbar.

---

10. Auf eine Matrix A werden die folgenden elementaren Zeilenumformungen angewendet:

$$(ii) \to (ii) - 2 \cdot (i), \quad (iii) \leftrightarrow (iv), \quad (i) \to -3(i) + 5(iv)$$

Es entsteht die Matrix $\tilde{A}$. Wie hängen die Determinanten der beiden Matrizen zusammen?

- [x] $\det \tilde{A} = 3 \cdot \det A$
- [ ] $\det \tilde{A} = -3 \cdot \det A$
- [ ] $\det \tilde{A} = 10 \cdot \det A$
- [ ] $\det \tilde{A} = -10 \cdot \det A$

Die erste Umformung verändert die Determinate nicht, durch die zweite wird die Determinante mit (-1) multipliziert und durch die dritte wird sie mit (-3) multipliziert. Insgesamt ist

$$\det \tilde{A} = (-1) \cdot (-3) \cdot \det A = 3 \cdot \det A.$$

---

11. Wir betrachten die imaginäre Einheit $i \in \mathbb{C}$. Was ist i^{2008}?

- [x] 1
- [ ] -1
- [ ] i
- [ ] $-i$

Es ist

$$i^{2008} = \left(i^2\right)^{1004} = (-1)^{1004} = \left((-1)^2\right)^{502} = 1^{502} = 1.$$

---

12. Für eine komplexe Zahl z gilt $|z| = \sqrt{10}$ und $\mathrm{Re} z = -1$. Was kann man über den Imaginärteil von z sicher sagen?

- [ ] Es ist $\mathrm{Im} z = -9$.
- [ ] Es ist $\mathrm{Im} z = 3$.
- [ ] Es ist $\mathrm{Im} z \in \{-9, 9\}$.
- [x] Es ist $\mathrm{Im} z \in \{-3, 3\}$.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z|^2 = (\mathrm{Re} z)^2 + (\mathrm{Im} z)^2$. Hier ist also

$$10 = |z|^2 = (\mathrm{Re} z)^2 + (\mathrm{Im} z)^2 = 1 + (\mathrm{Im} z)^2.$$

Folglich ist $(\mathrm{Im} z)^2 = 9$ und damit ist $\mathrm{Im} z = \pm 3$.
