UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dipl. Math. Dominik Faas

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2008/2009

Testat 2 vom 14.01.2009

Name:
Matrikelnummer:
Übungsgruppe:

Hinweise:

- Bei den folgenden Aufgaben ist immer jeweils genau eine Aussage richtig. Kreuzen Sie die richtige Aussage an.
- Die ersten 6 richtig gelösten Aufgaben sind die Voraussetzung dafür, Zusatzpunkte erzielen zu können. Jede weitere richtig gelöste Aufgabe bringt Ihnen dann 4 Zusatzpunkte für die Übungen. (Sie können in keinem Fall Minuspunkte erhalten.)

1. Das charakteristische Polynom p_A einer Matrix $A \in M(n \times n)$ ist gegeben durch

☐ $p_A(\lambda) = \det(\lambda E_n + A)$

☒ $p_A(\lambda) = \det(\lambda E_n - A)$

☐ $p_A(\lambda) = \lambda \det(E_n) + \det A$

☐ $p_A(\lambda) = \lambda \det(E_n) - \det A$

Die Nullstellen von p_A sind die Eigenwerte von A. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt einen Vektor } x \neq 0 \text{ mit } Ax = \lambda x \\
&\Leftrightarrow \quad \text{es gibt einen Vektor } x \neq 0 \text{ mit } (\lambda E_n - A)\,x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{das homogene LGS } (\lambda E_n - A) \text{ hat mehr als eine Lösung (also unendlich viele)} \\
&\overset{\text{Satz 2.15}}{\Leftrightarrow} \quad \det(\lambda E_n - A) = 0
\end{aligned}
$$

Also muss p_A durch $p_A(\lambda) = \det(\lambda E_n - A)$ definiert sein.

2. Welche Aussage trifft zu ?

- ☐ Eine 2×2-Matrix hat immer mindestens 2 Eigenwerte.
- ☐ Eine 2×3-Matrix hat immer mindestens 2 Eigenwerte.
- ☐ Eine 3×2-Matrix kann höchstens 3 Eigenwerte haben.
- ☒ Eine 3×3-Matrix kann höchstens 3 Eigenwerte haben.

Falls eine Matrix nicht quadratisch ist, macht es keinen Sinn überhaupt von Eigenwerten zu sprechen. Eine $n \times n$-Matrix hat in $\mathbb{C}$ mindestens einen und höchstens n Eigenwerte.

---

3. Was bedeutet es definitionsgemäß, dass eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergiert?

- ☐ Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $|a_n - a| > \epsilon$ für alle $n \leq n_0$.
- ☐ Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $|a_n - a| > \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.
- ☐ Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \leq n_0$.
- ☒ Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Falls man n groß genug wählt ($n \geq n_0$) wird der Abstand von a_n zu a kleiner als eine vorgegebene (feste) Zahl $\epsilon > 0$ (also $|a_n - a| < \epsilon$).

---

4. Gegen welchen Wert konvergiert die Folge $\left(\frac{3+n^3}{2-n+5n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

- ☐ $\frac{3}{2}$
- ☐ $\frac{1}{5}$
- ☒ ∞
- ☐ 0

Der führende Term im Zähler ist n^3, der im Nenner n^2. Folglich wächst der Zähler schneller und der Bruch konvergiert gegen ∞ (Vorzeichen der führenden Terme ist $+$). Genauer:

$$\frac{3+n^3}{2-n+5n^2} = \underbrace{n}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{\frac{3}{n^3}+1}{\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n}+5}}_{\to\frac{1}{5}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

---

5. Vorausgesetzt es gilt $x_k \neq 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Was lässt sich über die Konvergenz der Folge $\left(\frac{1}{x_k}\right)_k$ mit Sicherheit sagen ?

☐ Es ist $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k} = \infty$.

☒ Sind alle $x_k < 0$, so gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k} = -\infty$.

☐ Es ist möglich, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k} \in \mathbb{R}$ ist.

☐ $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert nicht.

Falls $x_k > 0$ $(k \geq k_0)$, so ist $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k} = \infty$.
Falls $x_k < 0$ $(k \geq k_0)$, so ist $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k} = -\infty$.
Falls x_k unendlich oft das Vorzeichen wechselt, existiert $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{x_k}$ nicht.

---

6. Welche dieser Rekursionen beschreibt eine linear rekursiv definierte Folge der Ordnung 2 ?

☐ $a_n = 3a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

☐ $a_n = na_{n-1} - 2a_{n-2}$

☒ $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2}$

☐ $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-3}$

Eine linear rekursiv definierte Folge der Ordnung k, ist gegeben durch

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \quad (c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R} \text{ fest}).$$

Bei der dritten Wahlmöglichkeit ist $k = 2$ und $c_1 = 1,\ c_2 = -2$. Bei der vierten Möglichkeit handelt es sich um eine linear rekursiv definierte Folge der Ordnung 3 mit $c_1 = 4,\ c_2 = 0,\ c_3 = -5$.
In der Vorlesung haben wir gelernt, wie man mit Hilfe der charakteristischen Gleichung eine geschlossene Formel für linear rekursiv definierte Folgen bestimmen kann.

---

7. Welches der folgenden Kriterien für Reihenkonvergenz ist richtig ?

☐ Falls $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ $(n \geq n_0)$ gilt, ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

☐ Falls $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

☐ Falls $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

☒ Falls $a_n, b_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in]0,\infty[$ existiert, so haben $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ dasselbe Konvergenzverhalten.

Bei der ersten Wahlmöglichkeit reichen die Voraussetzungen nicht aus (siehe: Quotientenkriterium 5.29 und 5.30). Nötig zur absoluten Konvergenz der Reihe wäre etwa

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \ (n \geq n_0)$$

mit einer <u>festen</u> Zahl $q < 1$. $\Big($Alternativ genügt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.\Big)$
Die zweite Möglichkeit ist falsch. Richtig ist lediglich die Umkehrung (siehe: 5.23):

$$\text{Falls } (a_n)_n \ \underline{\text{keine}} \text{ Nullfolge ist, ist } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \underline{\text{divergent}}.$$

Bei der dritten Möglichkeit fehlt die Voraussetzung, dass $(a_n)_n$ monoton fallend ist (siehe: Leibnizkriterium 5.33).
Die vierte Möglichkeit ist korrekt und entspricht dem Vergleichskriterium (siehe: Aufgabe 32).

---

8. Für welche $c \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^c}$?

☐ genau für $c > -1$.

☐ genau für $c \geq 1$.

☒ genau für $c > 1$.

☐ genau für $c \geq 2$.

Falls der Exponent c im Nenner größer als 1 ist, ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^c}$ konvergent. Beispielsweise ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent. Vergleiche dazu auch 5.28.

---

9. Seien $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so dass a in D approximierbar ist. Was bedeutet es definitionsgemäß, dass $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ gilt ?

- [x] Für jede Folge $(x_n)_n$ in D mit $x_n \overset{n}{\to} a$ gilt $f(x_n) \overset{n}{\to} c$.
- [ ] Für jede Folge $(x_n)_n$ in D mit $f(x_n) \overset{n}{\to} c$ gilt $x_n \overset{n}{\to} a$.
- [ ] Es gibt eine Folge $(x_n)_n$ in D mit $x_n \overset{n}{\to} a$ und $f(x_n) \overset{n}{\to} c$.
- [ ] Für jede Folge $(x_n)_n$ in D gilt $x_n \overset{n}{\to} a$ und $f(x_n) \overset{n}{\to} c$.

Wann immer sich x (in Form einer Folge) dem Wert a annähert, so nähert sich $f(x)$ dem Wert c.

---

10. Was ist der Grenzwert $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$?

- [ ] 0
- [x] 1
- [ ] ∞
- [ ] Der Grenzwert existiert nicht.

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to \sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \exp\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \to \exp 0 = 1$$

---

11. Was kann man mit dem Zwischenwertsatz begründen.

- [ ] Jede stetige Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$ erfüllt auch $f(0) = 0$.
- [ ] Zu jeder stetigen Funktion $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(-1) < 0$ und $f(1) > 0$ gibt es einen Wert
$$\xi \in]-1, 1[\setminus\{0\} \text{ mit } f(\xi) = 0.$$
- [x] Zu jeder stetigen Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(-1) > 0$ und $f(1) < 0$ gibt es einen Wert
$$\xi \in]-1, 1[\text{ mit } f(\xi) = 0.$$
- [ ] Zu jeder stetigen Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(-1) = 0$ und $f(1) = 0$ gibt es einen Wert
$$\xi \in]-1, 1[\text{ mit } f(\xi) = 0.$$

Zwischenwertsatz: Falls der Definitionsbereich ein Intervall $[a, b]$ ist und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, wird jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an (mindestens) einer Stelle $\xi \in]a, b[$ angenommen (diese Stelle lässt sich aber im allgemeinen nicht näher bestimmen).

---

12. Wie ist die Ableitung einer Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in]a, b[$ definiert.

- [ ] $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)+f(x_0)}{x+x_0}$
- [x] $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- [ ] $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- [ ] $f'(x_0) = \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$

Der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ beschreibt die Steigung der Sekanten des Graphen von f durch die Punkte $(x/f(x))$ und $(x_0/f(x_0))$. Lässt man $x \to x_0$ konvergieren, so erhält man die Steigung der Tangenten an den Graphen an der Stelle x_0 (falls eine solche Tangente existiert). Man nennt diese Tangentensteigung die Ableitung von f an der Stelle x_0.
