**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Dr. Dominik Faas

# Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2008/2009

## Testat 3 vom 11.02.2009

Name:
Matrikelnummer:
Übungsgruppe:

Hinweise:

- Bei den folgenden Aufgaben ist immer jeweils genau eine Aussage richtig. Kreuzen Sie die richtige Aussage an.
- Die ersten 6 richtig gelösten Aufgaben sind die Voraussetzung dafür, Zusatzpunkte erzielen zu können. Jede weitere richtig gelöste Aufgabe bringt Ihnen dann 4 Zusatzpunkte für die Übungen. (Sie können in keinem Fall Minuspunkte erhalten.)

1. Was ist die Ableitung der Funktion $f : ]-\infty, 0[ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log(-2x)$ ?

☐ $f'(x) = -\frac{1}{x}$

☒ $f'(x) = \frac{1}{x}$

☐ $f'(x) = -\frac{2}{x}$

☐ $f'(x) = \frac{2}{x}$

Nach der Kettenregel ist ist $f'(x) = \frac{1}{-2x} \cdot (-2) = \frac{1}{x}$.

2. Die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Was ist $\arccos'(0)$ ?
$\big($ Hinweis: $\sin(0) = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \sin(\pi) = 0,\ \cos(0) = 1,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \cos(\pi) = -1.$ $\big)$

☒ $-1$

☐ 0

☐ 1

☐ arccos ist in 0 nicht differenzierbar.

Es ist

$$\arccos'(0) = \frac{1}{\cos'(\arccos(0))} = \frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

3. Berechnen sie den Grenzwert $G = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$ mit der Regel von l'Hospital.

- [x] $G = 0$
- [ ] $G = 1$
- [ ] $G = 2$
- [ ] Die Regel von l'Hospital lässt sich hier nicht anwenden.

Wegen

$$e^{x^2} - 1 \xrightarrow{x\to 0} 0 \quad \text{und} \quad x \xrightarrow{x\to 0} 0$$

kann man die Regel von l'Hospital anwenden. Man erhält:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x^2}-1\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{1} = 0.$$

---

4. Eine zweimal differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$) hat in einem Punkt $x \in I$ eine lokale Maximumstelle. Was lässt sich über die 2.Ableitung $f''(x)$ sagen?

- [ ] Es ist immer $f''(x) > 0$.
- [ ] Es ist sowohl möglich, dass $f''(x) > 0$ ist, als auch möglich, dass $f''(x) = 0$ ist.
- [ ] Es ist immer $f''(x) < 0$.
- [x] Es ist sowohl möglich, dass $f''(x) < 0$ ist, als auch möglich, dass $f''(x) = 0$ ist.

Bei einer lokalen Extremstelle ist stets $f'(x) = 0$. Ist $f'(x) = 0$, so kann man die zweite Ableitung betrachten. Dabei gilt:

- Ist $f''(x) > 0$, so ist $x$ lokale Minimumstelle. (Die Umkehrung gilt aber nicht.)
- Ist $f''(x) < 0$, so ist $x$ lokale Maximumstelle. (Die Umkehrung gilt aber nicht.)
- Ist $f''(x) = 0$, so lässt sich nichts aussagen, es kann sich um eine lokale Maximustelle/Minimumstelle handeln (muss aber nicht).

---

5. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wieviele Stammfunktionen $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ von $f$ mit $F(1) = 12$ und $F(-1) = 0$ gibt es?

- [ ] keine
- [x] eine
- [ ] zwei
- [ ] unendlich viele

Da die Funktion stetig ist, lassen sich auf beiden Teilintervallen $]-\infty, 0[$ und $]0, \infty[$ des Definitionsbereiches Stammfunktionen finden, die sich jeweils nur um additive Konstanten $c_1$ (auf $]-\infty, 0[$) und $c_2$ (auf $]0, \infty[$) unterscheiden. Durch die gegebenen Funktionswerte lassen sich beide Konstanten eindeutig festlegen. Es gibt also genau eine Stammfunktion mit den angegebenen Bedingungen.

---

6. Was ist $\int\limits_1^{\exp x} \frac{1}{t}\, dt$ für eine feste Zahl $x \in \mathbb{R}$ ?

- ☐ $1$
- ☒ $x$
- ☐ $\exp(x)$
- ☐ $\log x$

Es ist

$$\int\limits_1^{\exp x} \frac{1}{t}\, dt = [\log t]_1^{\exp x} = \log(\exp x) - \log 1 = x - 0 = x.$$

---

7. Was erhält man, wenn man $\int\limits_a^b x^3 e^x\, dx$ partiell integriert ?

- ☐ $\left[3x^2 \cdot e^x\right]_a^b + 3\int_a^b x^2 e^x\, dx$
- ☐ $\left[3x^2 \cdot e^x\right]_a^b - 3\int_a^b x^2 e^x\, dx$
- ☐ $\left[x^3 \cdot e^x\right]_a^b + 3\int_a^b x^2 e^x\, dx$
- ☒ $\left[x^3 \cdot e^x\right]_a^b - 3\int_a^b x^2 e^x\, dx$

Man betrachtet $f(x) = x^3$ und $g'(x) = e^x$. Dann ergeben sich $f'(x) = 3x^2$ und $g(x) = e^x$. Mit partieller Integration folgt:

$$\int\limits_a^b x^3 e^x\, dx = \int\limits_a^b f(x)g'(x)\, dx = [f(x)g(x)] - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\, dx = \left[x^3 \cdot e^x\right]_a^b - 3\int_a^b x^2 e^x\, dx.$$

---

8. Was erhält man, wenn man im Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\, dt$ die Substitution $x(t) = \frac{1}{2}t$ durchführt ?

- ☐ $2 \cdot \int\limits_0^{\pi} \sin(x)\, dx$
- ☐ $2 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\, dx$
- ☐ $\frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^{\pi} \sin(x)\, dx$
- ☐ $\frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\, dx$

Leider war hier die richtige Antwort nicht dabei. Die angegebene Substitution liefert $2 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x)\, dx$.
Eigentlich gedacht war die (sinnvollere) Substitution $x(t) = 2t$. Diese liefert die vorgesehene Lösung $\frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^{\pi} \sin(x)\, dx$ (3. Antwortmöglichkeit).
Diese Aufgabe wurde aus der Wertung genommen, d.h. sie wurde bei allen als richtig gewertet.

---

9. Wo liegt der Fehler in folgender Argumentation ?

$$\int \frac{1}{t}\ dt \overset{(I)}{=} \int \left(\frac{1}{t}\cdot 1\right)\ dt \overset{(II)}{=} \frac{1}{t}\cdot t - \int \left(-\frac{1}{t^2}\cdot t\right)\ dt \overset{(III)}{=} 1 + \int \frac{1}{t}\ dt \overset{(IV)}{\Rightarrow} \quad 0 = 1$$

☐ In (I): Multiplikation des Integranden mit 1

☐ In (II): Partielle Integration mit $f(t) = \frac{1}{t}$ und $g'(t) = 1$

☐ In (III): Zusammenfassen

☒ In (IV): Auf beiden Seiten $\int \frac{1}{t}\ dt$ abziehen

Man beachte die Bedeutung der Schreibweise für unbestimmte Integrale: $\int f(t)\ dt = F(t)$ heißt nur, dass $F$ eine Stammfunktion von $f$ ist. Da sich Stammfunktionen um additive Konstanten unterscheiden können, ist (in diesem Sinne) die Gleichung

$$\int f(t)\ dt = \int f(t)\ dt + C$$

noch richtig. Da dabei aber $\int f(t)\ dt$ keine Zahl ist und das Gleichheitszeichen hier nicht die Bedeutung hat, dass auf beiden Seiten jeweils gleiche Zahlen stehen, ist es nicht zulässig hier auf beiden Seiten $\int f(t)\ dt$ abzuziehen.

---

10. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Was bedeutet es definitionsgemäß, dass das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\ dt$ existiert ?

☐ Es existiert der Grenzwert $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(t)\ dt$.

☒ Es existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{r\to\infty} \int_0^r f(t)\ dt$ und $\lim\limits_{r\to-\infty} \int\limits_r^0 f(t)\ dt$.

☐ Es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

☐ $f$ hat eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die problematischen Grenzen eines uneigentlichen Integrals sind (einzeln) durch eine feste Zahl zu ersetzen, die anschließend gegen die kritische Grenze läuft. Man kann sich überlegen, dass erste und dritte Antwortmöglichkeit jeweils eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Existenz des uneigentlichen Integrals darstellen. Die 4. Antwortmöglichkeit ist stets erfüllt (da $f$ stetig ist) und stellt daher keine sinnvolle Bedingung dar.

---

11. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist <u>nicht</u> vom Typ der getrennten Variablen ?

☐ $y' = t^3 \cdot (y+1)$

☐ $y' = -3\sin y \cdot (t+1)$

☐ $y' = \frac{\exp(y^2-1)}{t}$

☒ $y' = t^3 \cdot (y+t)$

Bei der ersten Antwortmöglichkeit ist $f(t) = t^3$ und $g(y) = y + 1$.
Bei der zweiten Antwortmöglichkeit ist $f(t) = -3(t+1)$ und $g(y) = \sin y$.
Bei der dritten Antwortmöglichkeit ist $f(t) = \frac{1}{t}$ und $g(y) = \exp(y^2 - 1)$.

---

12. Was sind die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + y' - 2y = 0$ ?

- [x] $f_{c_1,c_2}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \quad (c_1, c_2 \in R)$
- [ ] $f_{c_1,c_2}(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-t} \quad (c_1, c_2 \in R)$
- [ ] $f_{c_1,c_2}(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{2t} \quad (c_1, c_2 \in R)$
- [ ] $f_{c_1,c_2}(t) = e^t\, (c_1 \sin(-2t) + c_2 \cos(-2t)) \quad (c_1, c_2 \in R)$

Die angegebene DGL ist linear und homogen von 2.Ordnung. Ihre charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Sie hat zwei einfache reelle Nullstellen 1 und $-2$. Folglich sind die Lösungen der DGL gegeben durch

$$f_{c_1,c_2}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \quad (c_1, c_2 \in R).$$