



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2008/2009

Blatt 10

Aufgabe 36 (2+2+2+2+2+2=12 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, falls diese existieren:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x}{(x+2)^2} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 + 5x}{4x^3 - 7x^2 + 5} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(\frac{x^4 + 2}{x^3 + 1} \right) \\ \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{2\pi}{x} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^x + \cos \left(\frac{2\pi x + 3}{x-2} \right) \right) & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \exp \exp -x^2 \end{array}$$

Aufgabe 37 (2+2+2+3*+3*=6+6* Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x+1 & , \quad x \leq 0 \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) & , \quad 0 < x < \pi \\ x & , \quad \pi \leq x \end{cases} \\ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & , \quad x < 1 \\ -2 & , \quad x = 1 \\ 2 \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right) & , \quad 1 < x \end{cases} \\ h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\exp \left(\frac{1}{x^2} \right)} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(b)* Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat (d.h. zeigen Sie, dass es eine Stelle $\xi \in [0, 1]$ mit $f(\xi) = \xi$ gibt).

Anleitung: Betrachten Sie die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Was wissen Sie über das Vorzeichen von $g(0)$ und $g(1)$? Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion g an.

(c)* Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\exp(x) = 3x$$

(mindestens) eine Lösung $x \in]0, 1[$ hat.

Anleitung: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf eine geeignete Hilfsfunktion an.

Aufgabe 38**(4+4+4=12 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in jedem Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung. **Verwenden Sie dazu nur Definition 7.1 aus der Vorlesung.**

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$

Hinweis: Polynomdivision am Differenzenquotienten

(c) $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$

Hinweis: Erweitern Sie den Differenzenquotienten mit $\sqrt{x} + \sqrt{x_0}$.

Aufgabe 39**(2+2+2+2+3*+3*=8+6* Punkte)**

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f_1(x) = \frac{\exp x}{x^2}$ (b) $f_2(x) = \log(\exp(x) \cdot x)$ (c) $f_3(x) = \tan^2(x)$

(d) $f_4(x) = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}}$ (e)* $f_5(x) = 2^x$ (f)* $f_6(x) = x^x$

Hinweis zu (e)* und (f)*: Betrachten Sie die Definition von a^x aus der Vorlesung.

Abgabe: Mittwoch, 14.01.2009 in der Pause der Vorlesung