



## Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2008/2009

---

### Blatt 11

---

#### Aufgabe 40 (2+2+2+3+3+3=15 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1-x} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2)} - 1}{x^2} & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \exp(\cos x)}{x - \frac{\pi}{2}} \\ \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3 - x^2} & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x \cdot \sin \left( -\frac{1}{x} \right) \right) & \text{(f)} \lim_{x \downarrow 0} x^x \end{array}$$

---

#### Aufgabe 41 (3+3+3+3=12 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und Monotonieintervalle folgender Funktionen:

$$\begin{array}{l} \text{(a)} f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 \\ \text{(b)} f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \cdot \exp(1-x) \\ \text{(c)} f_3 : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log(x^2 - 1) \\ \text{(d)} f_4 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2+3}{x-1} \end{array}$$

---

#### Aufgabe 42 (4+4=8 Punkte)

(a) Begründen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + e^x$$

eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  besitzt. Bestimmen Sie  $(f^{-1})'(1)$ .

(b) Die Funktion

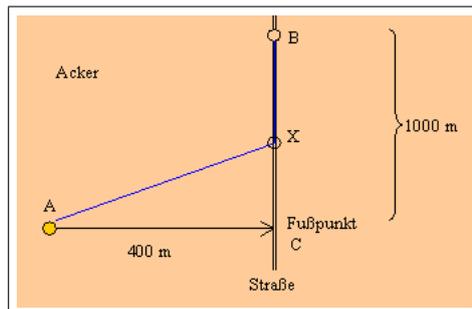
$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

ist die Umkehrfunktion von  $\sin : \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$ . Berechnen Sie die Ableitung von  $\arcsin$  an den Stellen  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 0$  und  $x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ . Verwenden Sie dazu die Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion aus der Vorlesung (siehe 7.6).

---

**Aufgabe 43****(5+10\* Punkte)**

- (a) Bestimmen Sie die Seitenlängen  $a$  und  $b$  sowie den Flächeninhalt  $A$  desjenigen gleichschenkligen Dreiecks, das bei gegebenem Umfang  $U=9\text{cm}$  eine maximale Fläche enthält.
- (b)\* Ein Acker liegt an einer geradlinigen Straße. Ein Fußgänger befindet sich auf dem Acker im Punkt  $A$  und möchte möglichst schnell zu einem Punkt  $B$  auf der Straße gelangen. Der Fußpunkt  $C$  des Lotes von  $A$  auf die Straße hat von  $A$  die Entfernung  $400\text{m}$  und die Entfernung  $B$  nach  $C$  beträgt  $1000\text{m}$ . Auf der Straße kann sich der Fußgänger mit  $6\text{km/h}$  fortbewegen, auf dem Acker nur mit  $3.6\text{km/h}$ . Welchen Weg soll er einschlagen?



---

**Abgabe:** Mittwoch, 21.01.2009 in der Pause der Vorlesung