UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Dominik Faas

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2008/2009

Blatt 12

Aufgabe 44 **(4 Punkte)**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^b x^2 dx \quad \text{mit einer festen Zahl } b > 0.$$

Benutzen Sie dazu äquidistante Zerlegungen (vergleiche Satz 8.4 (b) und Beispiel 8.5). Sie dürfen dabei (ohne Beweis) verwenden, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 45 **(2+2+2+3+3+3=15 Punkte)**

Berechnen sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_0^4 \left(2x^2 - 3\sqrt{x}\right) dx$ (b) $\int_{-1}^1 e^{-2x} dx$ (c) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3}\right) dx$

(d) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \cdot x)\, dx$ (e) $\int_0^1 \left(e^x \cdot x^2\right) dx$ (f) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$

Aufgabe 46 **(1+1+1+1+1+1=6 Punkte)**

Überprüfen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

(a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ (b) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ (c) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(d) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ (e) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ (f) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Aufgabe 47 **(5+5+5+5*+5*=15+10* Punkte)**

Finden Sie zu den folgenden Funktionen zunächst eine Stammfunktion. Geben Sie dann alle Stammfunktionen der betreffenden Funktion an.

(a)

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = e^x \cdot \sin x$$

Hinweis: Integrieren Sie zweimal partiell (vergleiche Beispiel 8.15 (c)).

(b)

$$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Nullstellen α, β des Nenners. Finden Sie dann Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ mit

$$f_2(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

(Dieses Verfahren nennt man **Partialbruchzerlegung**.)

(c)

$$f_3 :]-1, 1[\to \mathbb{R},\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Hinweis: Substituieren Sie $x(t) = \sin t$ mit $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und beachten Sie, dass

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(d)*

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_4(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

Hinweis: Substitution $x(t) = \log t$ und Partialbruchzerlegung

(e)*

$$f_5 :]-\infty, -2[\cup]2, \infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \log(x^2 - 4)$$

Hinweis: Verwenden Sie Rechenregeln für den Logarithmus. Eine Stammfunktion von log ist bereits bekannt (siehe Vorlesung).

Bitte beachten Sie, dass Sie sich zur Teilnahme an der Hauptklausur am 23.02.2009 im LSF-Portal (HIS POS) anmelden müssen.

Abgabe: Mittwoch, 28.01.2009 in der Pause der Vorlesung