UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Dominik Faas

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2008/2009

Blatt 13

Aufgabe 48 **(4+4+4+4+4=20 Punkte)**

Bestimmen Sie eine Lösung zu den folgenden Anfangswertproblemen und ein maximales Intervall für den Definitionsbereich Ihrer Lösung.

(a) $y' = -3x^2y^2, \quad y(2) = 1.$

(b) $y' = -\frac{1+y^2}{ty}, \quad y(1) = 2$

(c) $y' = -\frac{1+y^2}{ty}, \quad y(-1) = -2$

(d) $y' = e^y \cdot \sin x, \quad y(\pi) = -\ln 2.$

(e) $y' = x \cdot \left(y^2 + 2y\right), \quad y(1) = 2.$

Hinweis: Verwenden Sie in allen Aufgabenteilen das Verfahren der Trennung der Variablen.

Aufgabe 49* **(5*+5*=10* Punkte)**

(a) Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$. Wir betrachten zu $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$(\star) \quad y'(x) = \alpha\left(ax + by(x) + c\right), \quad y(x_0) = y_0.$$

Begründen Sie, dass eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I um x_0 genau dann eine Lösung von $(\star)$ ist, wenn die Funktion

$$u : I \to \mathbb{R}, \; u(x) = ax + by(x) + c$$

das Anfangswertproblem

$$(\star\star) \quad u'(x) = a + b\alpha(u(x)), \quad u(x_0) = u_0$$

mit $u_0 = ax_0 + by_0 + c$ löst. Welchen Vorteil bietet $(\star\star)$ gegenüber $(\star)$?

(b) Finden Sie mit Hilfe von Teil (a) eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \left(-x + y(x) - 2\right)^2, \quad y(0) = 5.$$

Aufgabe 50 **(5+5=10 Punkte)**

(a) In einem Labor gedeiht eine Kolonie des Bakteriums *Ewald* unter konstanten, idealen Bedingungen, d.h. unbegrenzte Nährstoffmenge, genügend Platz und was *Ewald* sonst so braucht. Der Populationsumfang der Kolonie in Abhängigkeit von der Zeit t soll durch die Funktion $N = N(t)$ beschrieben werden. Dabei ist anzunehmen, dass der Zuwachs pro Zeiteinheit proportional zur vorhandenen Koloniestärke ist. Zu Beginn des Experiments ($t = 0$) soll die Anzahl der vorhandenen *Ewalds* gerade N_0 sein.
Modellieren Sie diese Annahmen in einem Anfangswertproblem und lösen Sie dieses.
Der Populationsumfang hat sich nach 7 Tagen verdoppelt. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante und skizzieren Sie $N(t)$ für $N_0 = 100.000.000$.

(b) In einem zweiten Versuch werden *Ewald* nicht mehr ideale Bedingungen zur Verfügung gestellt, sondern nur noch eine begrenzte Nährstoffmenge. In diesem Fall kann man annehmen, dass der Zuwachs pro Zeiteinheit proportional zu den freien Ressourcen $R = k \cdot (N_{\max} - N)$ und nach wie vor proportional zur vorhandenen Anzahl N ist (also insgesamt proportional zu $(N_{\max} - N) \cdot N$). Wie in (a) bezeichne $N_0 = N(t = 0)$ den Anfangsbestand der Kolonie.
Stellen Sie auch hierzu eine Anfangswertproblem auf und bestimmen Sie die Lösung.
Sei nun $N_0 = 100.000.000$ und $N_{\max} = 600.000.000$. Man beobachtet nach 2 Tagen einen Bestand von 1.200.000 *Ewalds*. Bestimmen Sie die Proportionalitätskonstante und skizzieren Sie $N(t)$.

Aufgabe 51 **(3+7=10 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie zunächst alle Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung
$$y'(t) = (2t - 5) \cdot y(t).$$
Finden Sie anschließend die Lösung mit $y(3) = 1$.

(b) Bestimmen Sie zunächst alle Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung
$$(\star)_h \quad y'(t) = \frac{t}{t^2 + 4} \cdot y(t).$$
Erraten Sie anschließend eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung
$$(\star) \quad y'(t) = \frac{t}{t^2 + 4} \cdot y(t) + t.$$
Geben Sie damit alle Lösungen von $(\star)$ an und bestimmen Sie die Lösung von $(\star)$ mit $y\left(\sqrt{5}\right) = 18$.

Hinweise:

- Die Hauptklausur findet am Montag, dem 23.02.2008 zwischen 14:00 (st) und 16:00 Uhr im Hörsaal I der Mathematik (Gebäude E2 4) statt.
- Sie dürfen bei dieser Klausur ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt benutzen. Sonst sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere KEIN Taschenrechner).
- Bitte beachten Sie, dass Sie sich zur Teilnahme an der Hauptklausur am 23.02.2009 im LSF-Portal (HIS POS) anmelden müssen.

Abgabe: Mittwoch, 04.02.2009 in der Pause der Vorlesung