UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Dominik Faas

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2008/2009

Blatt 14

Aufgabe 52 **(4+4+4=12 Punkte)**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme. Die auftretenden Differentialgleichungen sind linear von erster Ordnung und inhomogen. Bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL und verwenden Sie dann das Verfahren der Variation der Konstanten, um eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu finden. Dann können Sie alle Lösungen der inhomogenen DGL angeben und schließlich die Lösung finden, die der Anfangsbedingung genügt.

(a) $y' + 2y = e^{-2t}, \quad y(\log 2) = \log 2$

(b) $y' = \frac{3}{t}y + t^2, \quad y(-1) = -3$

(c) $y' - \frac{4t}{1+t^2}y = 1 + t^2, \quad y(-1) = -\pi$

Aufgabe 53 **(4+4+4+4=16 Punkte)**

Bestimmen Sie zunächst alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Ermitteln Sie dann jeweils die den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ genügende Lösung.

(a) $y'' + y' - 2y = 0$

(b) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(c) $y'' + 4y = 0$

(d) $y'' - 2y' + 5y = 0$

Aufgabe 54 **(4+4+4+4+4*=16+4* Punkte)**

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

(a)
$$y'' + 10y' + 25y = 75t^2 + 35t - 54$$
Hinweis: Eine Lösung findet man mit dem Ansatz $y_s(t) = at^2 + bt + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

(b)
$$y'' + 2y' + 2y = \cos t$$
Hinweis: Eine Lösung findet man mit dem Ansatz $y_s(t) = a \cos t + b \sin t$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

(c)
$$y'' - 2y' - 3y = te^{2t}$$
Hinweis: Eine Lösung findet man mit dem Ansatz $y_s(t) = (at + b)\, e^{2t}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

(d)
$$y'' - y' - 2y = te^{2t}$$
Hinweis: Eine Lösung findet man mit dem Ansatz $y_s(t) = \left(at^2 + bt\right) e^{2t}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

(e)* Warum führt der Ansatz $y_s(t) = (at + b)\, e^{2t}$ in (c) zum Erfolg, liefert aber in (d) keine spezielle Lösung? Worin liegt der grundsätzliche Unterschied?

Aufgabe 55* **(1*+3*+6*=10* Punkte)**

Beim **harmonischen Oszillator** ist die Rückstellkraft proportional zur Auslenkung. Zusätzlich wirkt eine Dämpfungskraft proportional (und entgegengesetzt) zur Geschwindigkeit. Man erhält die Differentialgleichung
$$my'' + 2m\gamma y' + ky = 0$$
mit Konstanten $m, k > 0,\ \gamma \geq 0$.
Wir nehmen zusätzlich die Anfangsbedingungen $y'(0) = 0$ und $y(0) = y_0 > 0$ an.

(a) Geben Sie ein Beispiel für das Vorhandensein eines harmonischen Oszillators in den Naturwissenschaften an und interpretieren Sie dafür die auftretenden Konstanten.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie die Lösung y für $\gamma = 0$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung y für $\gamma > 0$.
Betrachten Sie dazu $D = -\frac{k}{m} + \gamma^2$ und unterscheiden Sie die Fälle $D < 0$, $D = 0$ und $D > 0$. Skizzieren Sie jeweils die Lösung.

Hinweise:

- Die Hauptklausur findet am Montag, dem 23.02.2008 zwischen 14:00 (st) und 16:00 Uhr im Hörsaal I der Mathematik (Gebäude E2 4) statt.
- Sie dürfen bei dieser Klausur ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt benutzen. Sonst sind keine Hilfsmittel zugelassen (insbesondere KEIN Taschenrechner).
- Bitte beachten Sie, dass Sie sich zur Teilnahme an der Hauptklausur am 23.02.2009 im LSF-Portal (HIS POS) anmelden müssen.

Abgabe: Mittwoch, 04.02.2009 in der Pause der Vorlesung