UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dipl. Math. Dominik Faas

Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2008/2009

Blatt 3

Aufgabe 9 **(5+5=10 Punkte)**

(a) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3) \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 2),$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3) \quad , \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M(1 \times 3).$$

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, zwei dieser Matrizen miteinander zu multiplizieren (beachten Sie, dass eine Matrix auch mit sich selbst multipliziert werden kann). Berechnen Sie für mindestens drei dieser Möglichkeiten das Matrixprodukt.

(b) Betrachten Sie die beiden 2×2-Matrizen $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie die zugehörigen linearen Abbildungen

$$f_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie die Wirkungsweise von f_P und f_S geometrisch.
Berechnen Sie die Matrizen $(P \cdot P)$, $(S \cdot S)$, $(P \cdot S)$ und $(S \cdot P)$ und beschreiben Sie die Wirkungsweise der zugehörigen linearen Abbildungen.

Aufgabe 10 **(1+1,5+2+2,5+3=10 Punkte)**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2b-3 & b+1 \\ 2b & -b \end{pmatrix} \ (b \in \mathbb{R} \text{ beliebig}), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} d & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -d \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ (d \in \mathbb{R} \text{ beliebig}), \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11 **(4+2+4*= 6 +4* Punkte)**

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3)$ gegeben. Prüfen Sie, ob A invertierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse. Lösen Sie dann die linearen Gleichungssysteme $(A|b)$ und $(A|c)$ mit den rechten Seiten $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Prüfen Sie nach, ob die Matrizen $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ invertierbar sind und berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse.

(c)* Sei $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$ gegeben ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Begründen Sie:

- Falls $ad - bc \neq 0$ ist, so ist D invertierbar und es gilt $D^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Falls $ad - bc = 0$ ist, so ist D nicht invertierbar.

Aufgabe 12 **(2+4+4=10 Punkte)**

Die **Cramer'sche Regel** *besagt das Folgende:*
Ist $A \in M(n \times n)$ mit $\det A \neq 0$, so hat jedes LGS $(A|b)$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$. Diese Lösung kann man wie folgt bestimmen: Man bildet für $1 \leq j \leq n$ die Matrix $A_j \in M(n \times n)$, indem man die $j-te$ Spalte von A durch den Vektor b ersetzt. Dann berechnet man $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ und erhält den gesuchten Lösungsvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Beispiele hierzu finden Sie im Skript.

Lösen Sie damit die folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a) $\left(\begin{array}{rr|r} 3 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$.

(b) $\left(\begin{array}{rr|r} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{array}\right)$ ($a \in \mathbb{R}$ beliebig).

(c) $\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -5 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & -4 & 2 \end{array}\right)$.

Abgabe: Mittwoch, 12.11.2008 in der Pause der Vorlesung