



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2008/2009

Blatt 8

Aufgabe 27

(4+4=8 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Wert der Reihen $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{5^{k+1}}$.

(b) Rechnen Sie nach, dass

$$\frac{1}{4n^2 + 4n + 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt. Folgern Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n + 3}$ konvergiert und berechnen Sie den Reihenwert.

Aufgabe 28

(3+3+3+3=12 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^3}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} \quad (c) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m-5}{m^2} \quad (d) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{2l+3}{l^2+3l+2}$$

Aufgabe 29

(2+2+3+3+3+3=16 Punkte)

Bestimmen Sie zu den nachstehenden rekursiv definierten Folgen geschlossene Formeln:

(a) $a_0 = -1, a_n = -2 \cdot a_{n-1}$

(b) $b_3 = 5, b_n = \frac{1}{2} \cdot a_n$

(c) $c_0 = 4, c_1 = 0, c_n = -2c_{n-1} + 3c_{n-2}$

(d) $d_2 = 4, d_3 = -8, d_n = 3d_{n-1} + 10d_{n-2}$

(e) $e_0 = 7, e_1 = -1, e_n = -2e_{n-1} - e_{n-2}$

(f) $f_0 = 1, f_1 = 1, f_n = 4f_{n-1} - 5f_{n-2}$

Hinweis: In (b) und (d) beginnen die angegebenen Folgenglieder nicht beim Index 0. Sie müssen die Berechnung der Vorfaktoren α und β im Vergleich zu dem Verfahren in 5.17 entsprechend abändern.

Aufgabe 30***(5*+5*+5*=15* Punkte)**

Wir betrachten eine linear rekursiv definierte Folge der Ordnung 3. Gegeben sind $a_0, a_1, a_2, c_1, c_2, c_3$ und die Differenzengleichung

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3}.$$

Die charakteristische Gleichung dazu ist: $p(x) = x^3 - c_1 x^2 - c_2 x - c_3 = 0$.

- (a) Hat diese Gleichung drei (einfache) Lösungen x, y, z , so ist die Folge $(a_n)_n$ gegeben durch

$$a_n = \alpha x^n + \beta y^n + \gamma z^n,$$

wobei man $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ aus den Anfangswerten a_0, a_1, a_2 berechnen kann.

Leiten Sie eine geschlossene Formel für $(a_n)_n$ her, wenn

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 10, \quad a_n = -a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4a_{n-3}.$$

- (b) Hat diese Gleichung eine einfache Lösung x und eine doppelte Lösung y , so ist die Folge $(a_n)_n$ gegeben durch

$$a_n = \alpha x^n + (\beta + \gamma n) y^n,$$

wobei man $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ aus den Anfangswerten a_0, a_1, a_2 berechnen kann.

Leiten Sie eine geschlossene Formel für $(a_n)_n$ her, wenn

$$a_0 = -1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = -11, \quad a_n = 7a_{n-1} - 15a_{n-2} + 9a_{n-3}.$$

- (c) Hat diese Gleichung eine dreifache Lösung x , so ist die Folge $(a_n)_n$ gegeben durch

$$a_n = (\alpha + \beta n + \gamma n^2) x^n,$$

wobei man $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ aus den Anfangswerten a_0, a_1, a_2 berechnen kann.

Leiten Sie eine geschlossene Formel für $(a_n)_n$ her, wenn

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 20, \quad a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}.$$

- (d) (Diese Aufgabe gibt keine Punkte.) Machen Sie sich Gedanken darüber, wie das Finden einer geschlossenen Formel für linear rekursiv definierte Folgen beliebiger Ordnung funktionieren könnte. Sprechen Sie gegebenenfalls mit Ihrem Bremsen darüber.

Abgabe: Mittwoch, 17.12.2008 in der Pause der Vorlesung