



Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2008/2009

Blatt 9

Aufgabe 31

(2+2+2+2+2=10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+4^k}{k^2+5^k} \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{8n+2} \quad (c) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2+5}{m^4+5}$$
$$(d) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (2l+7)}{l^2+7l+12} \quad (e) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{5^j}{j!}$$

Aufgabe 32

(2+2+6=10 Punkte)

Mit dem folgenden **Vergleichskriterium** kann man die Konvergenz von Reihen in vielen Fällen auf einfache Art und Weise testen: Seien $(a_k)_{k \geq K}$ und $(b_k)_k$ Folgen mit $a_k, b_k > 0$ für alle $k \geq K$. Es existiere $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = c \in]0, \infty[$. Dann gilt

$$\sum_{k=K}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=K}^{\infty} b_k \text{ ist konvergent.}$$

(Das heißt, diese Reihen sind also beide konvergent oder beide divergent.)

(a) Betrachte $a_k = \frac{3k^2+3k-1}{2k^5-2k^2+7}$ und wähle dazu $b_k = k^{-3}$. Entscheiden Sie mithilfe des Vergleichskriteriums, ob $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.

(b) Betrachte $x_k = \frac{(k+1)^3}{k(\sqrt{k+6})^5}$ und wähle dazu $y_k = k^{-\frac{1}{2}}$. Entscheiden Sie mithilfe des Vergleichskriteriums, ob $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert.

(c) Untersuchen Sie mithilfe des Vergleichskriteriums die Reihen

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3k-7}{(k-2)^2}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k^2-1)(\sqrt{k}-1)}{4k^2(k^2+k-1)}, \quad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^k+k^2+1}{3^k \cdot (k^2+1)}$$

auf Konvergenz. Wählen Sie dabei jeweils eine geeignete Vergleichsfolge.

Aufgabe 33**(4+2+2=8 Punkte)**

Eine Bakterienkultur besteht zu Anfang aus 1000 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 78 Minuten.

(a) Die Anzahl der Bakterien zur Zeit t wird durch die Funktion

$$f(t) = C \cdot a^t$$

(näherungsweise) bestimmt. Die Zeit t soll dabei in Minuten angegeben werden. Bestimmen Sie a und C .

(b) Wieviele Bakterien sind nach 20 Minuten bzw nach 3 Stunden vorhanden?

(c) Wann wird sich die Anzahl der Bakterien verzehnfacht haben?

Aufgabe 34**(2+2+2+2+2+2=12 Punkte)**

Stellen Sie fest, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls. Bestimmen Sie zunächst jeweils den Definitionsbereich der entsprechenden Funktionen und verwenden Sie die Definition für Grenzwerte aus der Vorlesung (siehe 6.8(b)).

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 1}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ (f) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

Aufgabe 35***(10* Punkte)**

Der Weihnachtsmann macht sich mit seinem Rentier Rudolph auf den Weg zu den Wichteln, um den Schlitten mit den Geschenken abzuholen. Wie jeder weiß, ist der Weihnachtsmann nun auch nicht mehr der Jüngste. Er läuft mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h zu dem 3 km entfernten Wichtelhaus. Sein Rentier hingegen, frisch und ausgeruht, springt mit 6 km/h durch den Wald. Sie starten gleichzeitig. Um sich mal so richtig auszutoben, läuft Rudolph schnurstracks zum Wichtelhaus, dreht dort um, läuft zurück zum Weihnachtsmann, dreht wieder um, läuft zum Wichtelhaus, zurück zum Weihnachtsmann, und so weiter. Wieviel Kilometer ist Rudolph wohl gelaufen, wenn der Weihnachtsmann am Wichtelhaus ankommt? Die Zeit, die das Rentier zum Wenden braucht, soll vernachlässigt werden (Rudolph ist in der Tat äußerst wendig und flink).

Lösen Sie die Aufgabe zunächst, indem Sie eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ aufstellen, bei der s_k die Länge des Wegstücks ist, das Rudolph auf dem k -ten Wegstück zum Wichtelhaus (und zurück zum Weihnachtsmann) zurücklegt. Zeigen Sie dann, dass diese Reihe konvergiert und berechnen Sie den Reihenwert.

Kann man die Aufgabe auch einfacher lösen ?

Abgabe: Mittwoch, 07.01.2009 in der Pause der Vorlesung



**Frohe Weihnachten und
ein schönes und erfolgreiches Neues Jahr !**

