Ergänzungen zur Funktionentheorie II

A Parameterabhängige Integrale

Satz A1. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : X \times U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass*

(i) $f(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *ist für alle* $y \in U$,

(ii) f *partiell differenzierbar ist nach* y_j *und die partielle Ableitung*

$$\partial_j f : X \times U \to \mathbb{C},\ (x, y) \longmapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + he_j) - f(x, y)}{h}$$

noch partiell stetig in y_j *ist und*

(iii) eine integrable Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *existiert mit*

$$|\partial_j f(x, y)| \,\leq\, g(x) \quad ((x, y) \in X \times U).$$

Dann ist die Funktion $F : U \to \mathbb{C}, F(y) = \int\limits_X f(x, y) \mathrm{d}\mu(x)$ *partiell differenzierbar nach* y_j *und*

$$\partial_j F(y) \,=\, \int\limits_X \partial_j f(x, y) \mathrm{d}\mu(x) \quad (y \in U).$$

Beweis. Sei $y \in U$ fest und sei $\delta > 0$ mit $y + he_j \in U$ für $|h| < \delta$. Ist (h_k) eine Nullfolge in $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, so sind die Funktionen

$$g_k : X \longrightarrow \mathbb{C},\ g_k(x) \,=\, \frac{f(x, y + h_k e_j) - f(x, y)}{h_k} (k \in \mathbb{N})$$

μ-integrabel mit

$$|g_k(x)| \,=\, \left| \frac{1}{h_k} \int\limits_0^{h_k} (\partial_j f)(x, y + te_j) \mathrm{d}t \right| \,\leq\, g(x) \quad (x \in X).$$

Da $\lim\limits_{k \to \infty} g_k(x) = (\partial_j f)(x, y)$ für alle $x \in X$ gilt, folgt die Behauptung als Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz. $\square$

Verlangt man in Satz A.1 statt (ii), dass

$$f(x, \cdot) \in C(U)$$

für alle $x \in X$ gilt und ersetzt man (iii) durch die Bedingung, dass

$$|f(x, y)| \leq g(x) \quad ((x, y) \in X \times U)$$

mit einer geeigneten integrablen Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt, so ist die in Satz A.1 definierte Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ zumindest noch stetig.

Satz A2. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $f : X \times U \to \mathbb{C}$ eine Funktion so, dass* *(i)* $f(\cdot, z) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *ist für alle* $z \in U$,

(ii) $f(x, \cdot) \in \mathcal{O}(U)$ *ist für alle* $x \in X$ *und*

(iii) eine integrable Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *existiert mit*

$$|f(x,z)| \leq g(x) \quad ((x,z) \in X \times U).$$

Dann ist die Funktion $F : U \to \mathbb{C}, F(z) = \int_X f(x,z)\mathrm{d}\mu(x)$ *holomorph mit*

$$\partial_j F(z) = \int_X (\partial_j f)(x,z)\mathrm{d}\mu(x) \quad (1 \leq j \leq n, z \in U).$$

Hierbei sei $(\partial_j f)(x,z) = (\frac{\partial}{\partial z_j} f(x,\cdot))(z)$ *für* $x \in X$ *und* $z \in U$.

Beweis. Gemäß der obigen Bemerkung zu Satz A.1 ist F stetig. Für den Beweis der Holomorphie und die Berechnung der partiellen Ableitungen dürfen wir annehmen, dass $n = 1$ ist.
Sei $z_0 \in U$ fest und $r > 0$ mit $\overline{D}_{2r}(z_0) \subset U$. Dann gilt für $z \in D_r(z_0)$ und $x \in X$

$$|\partial f(x,z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2r}(z_0)} \frac{f(x,\xi)}{(\xi - z)^2} \mathrm{d}\xi \right| \leq \frac{2}{r} g(x).$$

Ist $(z_k)_{k \geq 1}$ eine Folge in $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ mit Limes z_0, so konvergiert die Folge

$$g_k = \frac{f(\cdot, z_k) - f(\cdot, z_0)}{z_k - z_0} \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

punktweise auf X gegen die Funktion $\partial f(\cdot, z_0)$ und wird wegen

$$|g_k(x)| = \left| \frac{1}{z_k - z_0} \int_{[z_0, z_k]} (\partial f)(x,z)\mathrm{d}z \right| \leq \frac{2}{r} g(x) \quad (x \in X)$$

durch eine μ-integrable Funktion majorisiert. Also folgt die Behauptung mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

$\square$