Ergänzungen zur Funktionentheorie II

B Differentialformen

Sei $E = \mathbb{R}^N$. Wir definieren $\mathbb{C}$–Vektorräume durch $\Lambda^0_{\mathbb{C}} E^* = \mathbb{C}$ und

$$\Lambda^p_{\mathbb{C}} E^* = \{\omega;\ \omega : E^p \to \mathbb{C} \text{ ist } \mathbb{R}\text{–multilinear und alternierend}\}.$$

Die $\mathbb{R}$–Linearformen

$$dx_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}, \quad (x_1, \ldots, x_N) \mapsto x_j \quad (1 \leq j \leq N)$$

bilden eine Basis des $\mathbb{C}$–Vektorraums $\Lambda^1_{\mathbb{C}} E^* = \{\varphi;\ \varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} \text{ ist } \mathbb{R}\text{–linear}\}$. Wie im $\mathbb{R}$–wertigen Fall (vgl. [O.Forster, Analysis 3]) zeigt man die folgenden Ergebnisse:

(1) $(\Lambda^1_{\mathbb{C}} E^*)^p \to \Lambda^p_{\mathbb{C}} E^*, (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \mapsto \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_p$ mit $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_p)(v_1, \ldots, v_p) = \det(\varphi_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq p}$ definiert eine $\mathbb{C}$–multilineare alternierende Abbildung.

(2) Ist $\{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$ eine Basis des $\mathbb{C}$–Vektorraums $\Lambda^1_{\mathbb{C}} E^*$, so bilden die Formen

$$\psi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \psi_{i_p} \quad (1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq N)$$

eine Basis des $\mathbb{C}$–Vektorraums $\Lambda^p_{\mathbb{C}} E^*$.

(3) Für $p, q \geq 1$ gibt es eindeutige $\mathbb{C}$–bilineare Abbildungen

$$\Lambda^p_{\mathbb{C}} E^* \times \Lambda^q_{\mathbb{C}} E^* \longrightarrow \Lambda^{p+q}_{\mathbb{C}} E^*, \quad (\omega, \sigma) \longmapsto \omega \wedge \sigma,$$

die mit der Definition in (1) verträglich sind in dem Sinne, dass

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_p) \wedge (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_q) = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_p \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_q$$

für alle $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, ; \psi_1, \ldots, \psi_q \in \Lambda^1_{\mathbb{C}} E^*$ gilt. Für $a \in \mathbb{C}$ und $\omega \in \Lambda^p_{\mathbb{C}} E^*$ definiert man $a \wedge \omega = \omega \wedge a = a\omega$.

(4) Für $\omega_1 \in \Lambda^p_{\mathbb{C}} E^*, \omega_2 \in \Lambda^q_{\mathbb{C}} E^*$ und $\omega_3 \in \Lambda^r_{\mathbb{C}} E^*$ gilt

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3), \quad \omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1.$$

Definition B1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^M$ eine offene Menge.*

a) Eine r–Form über U in N Unbestimmten ist eine Abbildung $\omega : U \to \Lambda^r_{\mathbb{C}} E^*$.

b) Eine r–Form ω über U wie oben heißt von der Klasse C^k $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$, falls die Koordinatenfunktionen von ω bezüglich einer (oder äquivalent bezüglich jeder) Basis des $\mathbb{C}$–Vektorraumes $\Lambda^r_{\mathbb{C}} E^*$ in $C^k(U)$ liegen. Ist $M = 2n$ und $U \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ offen, so nennt man ω analytisch, wenn alle Koordinatenfunktionen analytisch sind.

c) Wir schreiben $\Lambda^r(dx, C^k(U))$ $(= C^k_r(U)$, falls $M = N)$ für den $\mathbb{C}$–Vektorraum aller r–Formen der Klasse C^k über U in N Unbestimmten. Hierbei sei $dx = (dx_1, \ldots, dx_N)$. Entsprechend bezeichnen wir mit $\Lambda^r(dx, \mathcal{O}(U))$ $(= \mathcal{O}_r(U))$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller analytischen r-Formen über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$.

Wie üblich schreiben wir die Elemente von $\Lambda^r(dx,\, C^k(U))$ in der Form

$$\omega = \sum_{|I|=r} \omega_I dx_I.$$

Hierbei durchläuft I alle Multiindizes $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq N$ und

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

Das äußere Produkt aus (3) induziert entsprechende äußere Produkte

$$\wedge : \Lambda^p(dx, C^k(U)) \times \Lambda^q(dx, C^k(U)) \to \Lambda^{p+q}(dx, C^k(U)).$$

Im Spezialfall $N = M$ definiert bzw. zeigt man:

(5) Für $f \in C^1(U)$ sei $df : U \to \Lambda^1_{\mathbb{C}} E^*$ die 1–Form definiert durch

$$df(x) = \sum_{j=1}^{N} \quad (\partial f / \partial x_j)(x) dx_j.$$

Dies ist genau das totale Differential $Df(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^2$ der C^1–Funktion $f : U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ an der Stelle x.

(6) Für $k \geq 1$ bezeichnet man die $\mathbb{C}$–lineare Abbildung $d : C^k_r(U) \to C^{k-1}_{r+1}(U)$,

$$d\left(\sum_{|I|=r} \omega_I dx_I \right) = \sum_{|I|=r} (d\omega_I) \wedge dx_I$$

als die *äußere Ableitung*.

(7) Für $V \subset \mathbb{R}^M, U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in C^1(V, \mathbb{R}^N)$mit $\varphi(V) \subset U$ und eine r–Form $\omega = \sum\limits_{|I|=r} \omega_I dx_I$ über U heißt die r–Form über V

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{|I|=r} \omega_{i_1,\ldots,i_r} \circ \varphi \quad d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_r}$$

der *"pull–back"* der r–Form ω unter φ.

(8) Pull–back, äußere Ableitung und äußeres Produkt sind $\mathbb{C}$–linear und miteinander verträglich. Sei ω eine r–Form und σ eine s–Form über U. Ist φ wie oben, so gilt

$$\varphi^*(\omega \wedge \sigma) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\sigma).$$

Sind $\omega \in C^1_r(U)$, $\sigma \in C^1_s(U)$, so ist

$$d(\omega \wedge \sigma) = (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge d\sigma.$$

Ist $\varphi : V \to U$ eine C^2–Funktion, so gilt für $\omega \in C^1_r(U)$

$$\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega).$$

(9) Das pull–back ist transitiv in dem Sinne, dass für C^1–Funktionen $\psi : W \to V$, $\varphi : V \to U$ und jede r–Form ω über U gilt

$$\psi^*(\varphi^*(\omega)) = (\varphi \circ \psi)^*(\omega).$$

Ist $W \subset V$ und $\psi = j : W \to V$ die Inklusionsabbildung, so gilt

$$\varphi^*(\omega)|W = j^*(\varphi^*(\omega)) = (\varphi \circ j)^*(\omega) = (\varphi|W)^*(\omega).$$

(10) Man kann die äußere Ableitung d benutzen, um eine Sequenz von $\mathbb{C}$–Vektorräumen (den *de Rham–Komplex*) zu definieren. Denn für jede r–Form $\omega \in C_r^2(U)$ gilt

$$d(d\omega) = 0.$$

Sei im Folgenden $N = M = 2n$. Wir identifizieren $E = \mathbb{R}^{2n}$ mit $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum. In diesem Fall bilden auch die $\mathbb{R}$–linearen Abbildungen

$$dz_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ (z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_j \quad \text{und} \quad d\overline{z}_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \overline{z}_j$$

$(1 \le j \le n)$ eine Basis des $\mathbb{C}$–Vektorraumes $\Lambda^1_{\mathbb{C}} E^*$. Es ist

$$dz_j = dx_j + i\, dy_j, \quad d\overline{z}_j = dx_j - i\, dy_j \quad (1 \le j \le n),$$

und für $f \in C^1(U)$ ($U \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ offen) erhält man

$$df(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(z) dx_\nu + \frac{\partial f}{\partial y_\nu}(z) dy_\nu = \partial f(z) + \overline{\partial} f(z),$$

wobei die 1–Formen ∂f, $\overline{\partial} f : U \to \Lambda^1_{\mathbb{C}} E^*$ definiert sind durch

$$\partial f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} (\partial f / \partial z_\nu)(z) dz_\nu, \qquad \overline{\partial} f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} (\partial f / \partial \overline{z}_\nu)(z) d\overline{z}_\nu.$$

Definition B2. *Eine Form vom Typ (oder Bigrad)* (p, q) *über* U *ist eine* $(p+q)$*–Form* ω *über* U*, die sich schreiben lässt als*

$$\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} f_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

wobei I *und* J *alle Multiindizes* $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n$, $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n$ *durchlaufen und die Abkürzungen* $dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}$, $d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q}$ *benutzt wurden. Wir schreiben*

$$C^k_{p,q}(U) = \{\omega;\ \omega \textit{ ist } (p,q)\textit{–Form der Klasse } C^k \textit{ über } U\}$$

für den $\mathbb{C}$*–Vektorraum aller* (p, q)*–Formen der Klasse* C^k *über* U*. Entsprechend bezeichne* $\mathcal{O}_{p,q}(U)$ *den* $\mathbb{C}$*-Vektorraum aller analytischen* (p, q)*-Formen über* U*.*

Bemerkung B3. *Der Raum* $C^k_r(U)$ *zerfällt in die direkte Summe*

$$C^k_r(U) = \bigoplus_{p+q=r} C^k_{p,q}(U).$$

Benutzt man die Verträglichkeit der äußeren Ableitung mit äußeren Produkten, so erhält man für jede (p,q)–Form $\omega = \sum\limits_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} \omega_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J \in C^1_{p,q}(U)$

$$d\omega = \sum_{I,J} d\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J = \sum_{I,J} \partial\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J + \sum_{I,J} \overline{\partial}\omega_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

Definition B4. *Für $p,q \geq 0$ und $k \geq 1$ definiert man $\mathbb{C}$–lineare Abbildungen*

$$\begin{aligned} \partial : C^k_{p,q}(U) \to C^{k-1}_{p+1,q}(U), \quad & \omega \mapsto \sum_{I,J} (\partial\omega_{I,J}) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J, \\ \overline{\partial} : C^k_{p,q}(U) \to C^{k-1}_{p,q+1}(U), \quad & \omega \mapsto \sum_{I,J} (\overline{\partial}\omega_{I,J}) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J \end{aligned}$$

und setzt sie fort zu $\mathbb{C}$–linearen Abbildungen

$$\partial, \overline{\partial} : C^k_r(U) \to C^{k-1}_{r+1}(U).$$

Nach Definition gilt auf $C^k_r(U)$ die Identität $d = \partial + \overline{\partial}$. Durch Vergleich der Bigrade erhält man unter Benutzung von Bemerkung B3 die folgenden Regeln für den Umgang mit den *äußeren Differentialen* ∂ und $\overline{\partial}$.

Satz B5. *Seien $V \subset \mathbb{C}^m$, $U \subset \mathbb{C}^n$ offene Mengen, sei $\varphi : V \to U$ holomorph und seien $\omega \in C^1_r(U)$, $\sigma \in C^1_s(U)$ und $\tau \in C^2_r(U)$ Formen auf U. Dann gilt*

a) $\partial(\partial\tau) = \overline{\partial}(\overline{\partial}\tau) = (\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial)(\tau) = 0$;

b) $\partial(\omega \wedge \sigma) = (\partial\omega) \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge \partial\sigma, \quad \overline{\partial}(\omega \wedge \sigma) = (\overline{\partial}\omega) \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge \overline{\partial}\sigma$;

c) $\partial(\varphi^*(\omega)) = \varphi^*(\partial\omega), \quad \overline{\partial}(\varphi^*(\omega)) = \varphi^*(\overline{\partial}\omega)$.

Analog zum de Rham–Komplex aus der reellen Analysis betrachtet man in der komplexen Analysis den *$\overline{\partial}$–Komplex.*

Korollar B6. *Für $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $p \in \mathbb{N}$ ist*

$$0 \longrightarrow C^\infty_{p,0}(U) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty_{p,1}(U) \xrightarrow{\overline{\partial}} \ldots \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty_{p,n}(U) \longrightarrow 0$$

eine Sequenz von $\mathbb{C}$–Vektorräumen (d.h. alle Abbildungen sind $\mathbb{C}$–linear und das Produkt je zweier aufeinanderfolgender Abbildungen ist 0).

Man nennt die Quotientenvektorräume

$$H^r(C^\infty_{p,\cdot}(\Omega), \overline{\partial}) = \mathrm{Ker}(C^\infty_{p,r}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty_{p,r+1}(\Omega))/\mathrm{Im}(C^\infty_{p,r-1}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty_{p,r}(\Omega))$$

die Kohomologiegruppen der $\overline{\partial}$–Sequenz. Wir schreiben

$$H^r(C^\infty(\Omega), \overline{\partial}) = H^r(C^\infty_{0,\cdot}(\Omega), \overline{\partial}).$$