HILBERTRÄUME
DEFINITION UND ELEMENTARE EIGENSCHAFTEN

1. Definition

Definition. *Ein* **Skalarprodukt** *oder* **inneres Produkt** *auf einem* $\mathbb{C}$*-Vektorraum* H *ist eine Abbildung* $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$*, für die gilt:*

(i) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, f, g \in H)$
(ii) $(f, g) = \overline{(g, f)} \quad (f, g \in H)$
(iii) $(f, f) \geq 0 \quad (f \in H)$ *und* $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$

Ein **Prähilbertraum** *ist ein* $\mathbb{C}$*-Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist.*

Satz. *Sei* H *ein Prähilbertraum. Dann ist die Abbildung*

$$\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}\ ,\ \|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

eine Norm auf H *und es gilt die* **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|(f, g)| \leq \|f\|\|g\| \quad (f, g \in H).$$

Definition. *Ein* **Hilbertraum** *ist ein Prähilbertraum, der bezüglich der obigen Norm vollständig ist.*

Im folgenden seien H und K immer Hilberträume.

2. Orthogonalität

Definition.

(a) *Zwei Elemente* $f, g \in H$ *heißen* **orthogonal***, falls* $(f, g) = 0$ *gilt. Man schreibt hierfür* $f \perp g$.
(b) *Zwei Teilmengen* $S, T \subset H$ *heißen* **orthogonal***, falls* $f \perp g$ *für alle* $f \in S$, $g \in T$ *gilt. Man schreibt hierfür* $S \perp T$.
(c) *Für eine Teilmenge* $T \subset H$ *definiert man den* **Orthogonalraum** $T^\perp$ *durch:*

$$T^\perp = \{f \in H\ ;\ f \perp g \text{ für alle } g \in T\}$$

Wie man leicht sieht, ist $T^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H.

Satz. *Sei* M *ein abgeschlossener Untervektorraum von* H.

(a) *Zu jedem* $f \in H$ *gibt es genau ein* $f_0 \in M$ *mit*

$$\|f - f_0\| = dist(f, M) = \inf\{\|f - g\|\ ;\ g \in M\}.$$

(b) *Für* $f \in H$ *und* $h \in M$ *gilt*

$$\|f - h\| = dist(f, M) \Leftrightarrow f - h \in M^\perp.$$

Definition. *Nach dem letzten Satz existiert zu jedem abgeschlossenen Untervektorraum M von H und jedem $f \in H$ genau ein Element $f_0 \in M$ mit $f - f_0 \in M^\perp$. Hierdurch wird eine Abbildung*

$$P : H \to H \ , \ f \mapsto f_0$$

definiert. Man nennt P die **Orthogonalprojektion** *von H auf M.*

Satz. *Sei M ein abgeschlossener Untervektorraum von H und sei P die Orthogonalprojektion von H auf M. Dann gilt:*

(a) P ist eine lineare Abbildung mit $\|P\| \leq 1$.
(b) Es gilt $P^2 = P$ (das heißt, P ist eine Projektion).
(c) Es gilt $ker P = M^\perp$ und $ran P = M$.
(d) $1_H - P$ ist die Orthogonalprojektion auf $M^\perp$.

Definition. *Für eine Teilmenge $T \subset H$ definiert man die* **abgeschlossene lineare Hülle** *$\bigvee T$ als den Durchschnitt über alle abgeschlossenen Untervektorräume von H, die T enthalten.*

Satz. *Für jede Teilmenge T von H und jeden Untervektorraum M von H gilt:*

(a) $\bigvee T = T^{\perp\perp} = (T^\perp)^\perp$ und $\bigvee T = \overline{span T}$
(b) $\overline{M} = M^{\perp\perp}$ und $(\overline{M})^\perp = M^\perp$
(c) M ist dicht in H (das heißt $\overline{M} = H$) genau dann, wenn $M^\perp = \{0\}$.

3. Linearformen

Satz. *Sei $A : H \to K$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) A ist stetig.
(ii) A ist gleichmäßig stetig.
(iii) Es gibt ein $C > 0$ mit $\|Af\| \leq C\|f\|$ für alle $f \in H$.

Wegen (iii) werden lineare Abbildungen auch als **beschränkt** *bezeichnet.*

Definition.

(a) Sei $A : H \to K$ eine stetige lineare Abbildung. Dann definiert man die **Operatornorm** *von A als*

$$\|A\| = \inf\{C > 0 \ ; \ \|Af\| \leq C\|f\| \text{ für alle } f \in H\}.$$

(b) Die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von H nach K wird mit $L(H, K)$ bezeichnet. Abkürzend schreibt man auch $L(H)$ statt $L(H, H)$. Elemente von $L(H, K)$ bezeichnen wir auch als Operatoren.
(c) Ein Operator $A \in L(H, K)$ heißt invertierbar, wenn er bijektiv ist und die inverse (automatisch lineare) Abbildung A^{-1} stetig ist, das heißt $A^{-1} \in L(K, H)$ gilt.
(d) Die Elemente des **Dualraumes** *$L(H, \mathbb{C})$ von H werden als* **stetige lineare Funktionale** *bezeichnet.*

Satz.

(a) Für jeden Operator $A \in L(H, K)$ *gilt*

$$\|A\| = \sup\{\|Af\| \; ; \; \|f\| \leq 1\} = \sup\{\|Af\| \; ; \; \|f\| = 1\}$$

und

$$\|Af\| \leq \|A\|\|f\| \text{ für alle } f \in H.$$

(b) Die Operatornorm $\| \cdot \| : L(H, K) \to \mathbb{R}$ *ist eine Norm auf dem* $\mathbb{C}$*-Vektorraum* $L(H, K)$ *und* $L(H, K)$ *versehen mit dieser Norm ist ein Banachraum.*

Satz (Riesz-Fréchet)**.** *Sei* $\phi : H \to \mathbb{C}$ *ein stetiges lineares Funktional. Dann gibt es genau einen Vektor* $f_0 \in H$ *mit*

$$\phi(f) = (f, f_0) \text{ für alle } f \in H,$$

und es gilt $\|\phi\| = \|f_0\|$*.*

4. Orthonormalsysteme

Definition. *Sei* $I \neq \emptyset$ *eine Menge. Eine Familie* $(f_i)_{i \in I}$ *von Elementen aus* H *heißt* **summierbar***, wenn es ein* $f \in H$ *gibt, so daß zu jedem* $\epsilon > 0$ *eine endliche Teilmenge* F_0 *von* I *mit der folgenden Eigenschaft gibt:*

$$\text{Für jede endliche Teilmenge } F \text{ von } I \text{ mit } F_0 \subset F \text{ gilt } \|f - \sum_{i \in F} f_i\| < \epsilon.$$

Existiert ein solches f*, so ist es eindeutig bestimmt und wird die* **Summe** *der* f_i *genannt und mit*

$$f = \sum_{i \in I} f_i$$

bezeichnet.

Definition. *Sei* $I \neq \emptyset$ *eine Menge. Eine Familie* $(e_i)_{i \in I}$ *von Elementen aus* H *heißt* **Orthonormalsystem***, wenn*

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{falls } i = j \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Satz (Besselsche Ungleichung)**.** *Sei* $(e_i)_{i \in I}$ *ein Orthonormalsystem in* H*. Dann ist für jeden Vektor* $f \in H$ *die Familie* $(|(f, e_i)|^2)_{i \in I}$ *summierbar in* $\mathbb{C}$*, und es gilt*

$$\sum_{i \in I} |(f, e_i)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Ferner ist die Familie $((f, e_i)e_i)_{i \in I}$ *summierbar in* H*.*

Satz. *Für jedes Orthonormalsystem* $(e_i)_{i \in I}$ *sind äquivalent:*

(i) $\bigvee\{e_i \; ; \; i \in I\} = H$*.*

(ii) Für jedes $f \in H$ *ist die Familie* $((f, e_i)e_i)_{i \in I}$ *summierbar in* H *und es gilt*

$$f = \sum_{i \in I} (f, e_i)e_i.$$

(iii) Für jedes $f \in H$ *gilt die* **Parsevalsche Gleichung**

$$\sum_{i \in I} |(f, e_i)|^2 = \|f\|^2.$$

(iv) Es ist $\{e_i \; ; \; i \in I\}^\perp = \{0\}$*.*

Ist $I = \mathbb{N}$*, so sind (i) bis (iv) äquivalent zu* *(v) Für jedes $f \in H$ konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}(f, e_i)e_i$ und es gilt*

$$f = \sum_{i=0}^{\infty}(f, e_i)e_i.$$

Definition. *Ein Orthonormalsystem heißt* **vollständig** *oder* **Orthonormalbasis**, *wenn es eine der äquivalenten Bedingungen aus dem letzen Satz erfüllt.*

Satz. *Jedes Orthonormalsystem in einem Hilbertraum läßt sich zu einer Orthonormalbasis erweitern. Insbesondere besitzt jeder (nichttriviale) Hilbertraum eine Orthonormalbasis.*

5. Operatoren auf Hilberträumen

Definition. *Seien $A \in L(H, K)$ und $g \in K$. Dann ist die Abbildung*

$$H \to \mathbb{C}\ ,\ \ f \mapsto (Af, g)$$

ein stetiges lineares Funktional. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $A^*g \in H$ mit

$$(Af, g) = (f, A^*g) \quad (f \in H).$$

Die so definierte Abbildung $A^* : K \to H$ heißt die **adjungierte Abbildung** *von A.*

Satz.

(a) Für jeden Operator $A \in L(H, K)$ ist die adjungierte Abbildung A^* stetig linear, und es gilt
  (i) $\|A\| = \|A^*\|$
  (ii) $A^{**} = (A^*)^* = A$.
  Weiterhin ist die Abbildung

$$L(H, K) \to L(K, H)\ ,\ \ A \mapsto A^*$$

  antilinear, *das heißt, für alle $A, B \in L(H, K)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt*

$$(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha}A^* + B^*.$$

(b) Für zwei Operatoren $A, B \in L(H)$ gilt: $(AB)^* = B^*A^*$.
(c) Ist $A \in L(H)$ invertierbar, so ist auch A^* invertierbar, und es gilt

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Definition. *Ein Operator $A \in L(H)$ heißt*

(i) **Hermitesch** *oder* **selbstadjungiert**, *falls $A^* = A$ gilt.*
(ii) **normal**, *falls $A^*A = AA^*$ gilt.*
(iii) **unitär**, *falls $AA^* = A^*A = 1_H$ gilt.*

Satz.

(a) Für einen Operator $A \in L(H, K)$ sind äquivalent:
  (i) A ist **isometrisch**, *das heißt $\|Af\| = \|f\|$ für alle $f \in H$.*
  (ii) $(Af, Ag) = (f, g)$ für alle $f, g \in H$.
  (iii) $A^*A = 1_H$.
(b) Für einen Operator $A \in L(H)$ sind äquivalent:
  (i) A ist unitär.
  (ii) A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$.
  (iii) A ist surjektiv und isometrisch.
  (iv) A ist normal und isometrisch.