**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

# Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie IIb

Wintersemester 2011/12

**Blatt 1** Abgabetermin: Montag, 07.11.2011, vor der Vorlesung

---

*Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ heißt* harmonisch, *falls $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$ auf $\Omega$ gilt. In der Funktionentheorie I zeigt man, dass eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann harmonisch ist, wenn sie lokal Realteil einer holomorphen Funktion ist.*

## Aufgabe 1 (4×1=4 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch und $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. Zeigen Sie:

(a) $u_x$ und $u_y$ sind harmonisch.

(b) $f := u_x - iu_y$ ist holomorph.

(c) Entweder ist $u$ konstant oder die Menge $\{z \in \Omega;\ \operatorname{grad} u(z) = 0\}$ hat keinen Häufungspunkt in $\Omega$.

(d) $u_x$ ist konstant genau dann, wenn $u_y$ konstant ist.

---

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass $u$ konstant ist, wenn $u$ auf $G$ ein absolutes Maximum (oder Minimum) besitzt. (*Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass $G = D_r(z_0)$ ist, und benutzen Sie, dass $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ für $z \in \mathbb{C}$ gilt.*)

---

*Sei $M \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $u : M \to [-\infty, \infty)$ heißt* nach oben halbstetig, *falls für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $\{z \in M\ ;\ u(z) < t\}$ offen in $M$ (d.h. offen bezüglich der Relativtopologie von $\mathbb{C}$) ist.*

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $u : K \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig. Zeigen Sie, dass $u$ nach oben beschränkt ist und sein Supremum auf $K$ annimmt.

---

**(bitte wenden)**

**Aufgabe 4** **(2+2+1=5 Punkte)**

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $u : K \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig mit $u \neq -\infty$. Zeigen Sie:

(a) Für $k \geq 1$ definiert

$$u_k(x) = \sup_{z \in K} \{u(z) - k|x - z|\}$$

eine stetige Funktion $u_k : K \to \mathbb{R}$ mit $|u_k(x) - u_k(y)| \leq k|x - y|$ für alle $x, y \in K$.

(b) Sei $x \in K$ mit $u(x) > -\infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ gilt. (*Hinweis: Wählen Sie ein Folge $(x_k)_k$ in $K$ mit $u_k(x) = u(x_k) - k|x - x_k|$ für alle $k$.*)

(c) Sei $x \in K$ mit $u(x) = -\infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ gilt. (*Hinweis: Wenden Sie Teil (b) auf die Funktionen $g_n = \max(u, -n)$ an.*)

---

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

**http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre**