UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie IIb

Wintersemester 2011/12

Blatt 2 Abgabetermin: Montag, 21.11.2011, vor der Vorlesung

Aufgabe 5 (4+2=6 Punkte)

(a) Sei $f : \overline{\mathbb{D}}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ stetig, beschränkt und harmonisch auf $\mathbb{D}\backslash\{0\}$, und sei $g = P[f|\mathbb{T}]$. Zeigen Sie, dass $f = g$ auf $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ gilt.
(*Hinweis: Zeigen Sie mit dem Maximumprinzip, dass für jedes* $\varepsilon > 0$ *die Funktion*

$$h_\varepsilon(z) = g(z) - f(z) + \varepsilon \log |z|$$

auf $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ *nur Werte* ≤ 0 *annimmt.*)

(b) Beweisen Sie eine Version des Riemannschen Hebbarkeitssatzes für harmonische Funktionen.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei $(u_n)_n$ eine Folge harmonischer Funktionen $u_n : \Omega \to \mathbb{C}$, die kompakt gleichmäßig auf Ω gegen eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie: u ist harmonisch.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass u harmonisch ist genau dann, wenn für alle $a \in \Omega$ und $r > 0$ mit $\overline{D}_r(a) \subset \Omega$ gilt:

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(a)} u(x+iy)\, dx\, dy.$$

(*Hinweis: Benutzen Sie bzw. argumentieren Sie wie im Beweis von Korollar 1.10 der Vorlesung.*)

Aufgabe 8 (2+2=4 Punkte)

(a) Seien $u, v : \Omega \to \mathbb{C}$ harmonische Funktionen auf einem Gebiet Ω in $\mathbb{C}$ so, dass die Menge

$$\{z \in \Omega\,;\, u(z) = v(z)\}$$

nichtleeres Inneres hat. Zeigen Sie: $u = v$.

(b) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge $Z(u) = \{a \in \Omega\ ;\ u(a) = 0\}$ keine isolierten Punkte besitzen kann.
(*Hinweis: Maximumprinzip.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre