UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie IIb

Wintersemester 2011/12

Blatt 3 Abgabetermin: Montag, 05.12.2011, vor der Vorlesung

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ harmonisch und beschränkt. Benutzen Sie die in Aufgabe 7 bewiesene Version der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen, um zu zeigen, dass u konstant ist.
(*Hinweis: Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > |a|$ ist $\big(D_r(a) \cup D_r(0)\big) \setminus \big(D_r(a) \cap D_r(0)\big) \subset D_{r+|a|}(0) \setminus D_{r-|a|}(0)$.*)

Aufgabe 10 (3×2+2*=6+2* Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) f ist holomorph mit $\operatorname{Re} f \geq 0$.

(ii) Es gibt ein Maß $\mu \in M^+(\mathbb{T})$ und eine reelle Zahl α mit

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi + z}{\xi - z}\, d\mu(\xi) + i\alpha \quad (z \in \mathbb{D}).$$

(b) Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ harmonisch sind äquivalent:

(i) $(\|f_r\|_1)_{0 \leq r < 1}$ ist beschränkt.

(ii) Es existieren $g, h : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ harmonisch mit $f = g - h$.

(iii) $(*)$ Es existieren eindeutig bestimmte harmonische Funktionen $f^+, f^- : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ mit $f = f^+ - f^-$ so, dass für jede Zerlegung $f = g - h$ wie in (ii) $g \geq f^+$ und $h \geq f^-$ gilt. (*Hinweis: Benutzen Sie, dass ein entsprechendes Ergebnis für die Zerlegung eines reellen Maßes in Positiv- und Negativteil gilt.*)

(c) Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ harmonisch sind äquivalent:

(i) $(\|f_r\|_1)_{0 \leq r < 1}$ ist beschränkt.

(ii) Es existiert $u : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ harmonisch mit $|f| \leq u$.

(bitte wenden)

Für eine Funktion $u \in L^1(\mathbb{T})$ sind die Fourierkoeffizienten *von u definiert durch*

$$\hat{u}(n) = \int_{\mathbb{T}} u(\xi)\overline{\xi}^n \, d\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} u(e^{it}) e^{-int} \, dm(t) \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Aufgabe 11 (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Für $z \in \mathbb{D}$ und $\xi \in \mathbb{T}$ gilt

$$P(z,\xi) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z\overline{\xi}}{1 - z\overline{\xi}}\right) + 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{(n)}\overline{\xi}^n.$$

Hierbei sei $z^{(n)} = z^n$ für $n \geq 0$ und $z^{(n)} = \overline{z}^{|n|}$ für $n \leq 0$.

(b) Für $u \in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat{u}(n) = 0$ für alle $n < 0$ ist $P[u] : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analytisch.

Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $H^p = \left\{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D});\ \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p < \infty\right\}$.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Benutzen Sie Aufgabe 11, um zu zeigen, dass für $1 < p \leq \infty$ gilt

$$H^p = \{P[u];\ u \in L^p(\mathbb{T}) \text{ mit } \hat{u}(n) = 0 \text{ für alle } n < 0\}.$$

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre