UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Kevin Everard

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie IIb

Wintersemester 2011/12

Blatt 4 Abgabetermin: Montag, 19.12.2011, vor der Vorlesung

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Sei m das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^k$. Für $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^k)$ sei das Maß $m_f \in M(\mathbb{R}^k)$ definiert durch $m_f(A) = \int_A f\,dm$. Zeigen Sie: Ist f stetig in $x_0 \in \mathbb{R}^k$, so ist

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{m_f(B_\delta(x_0))}{m(B_\delta(x_0))} = f(x_0).$$

Aufgabe 14 (3×2=6 Punkte)

Für $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{T})$ sei $T_f : \mathbb{T} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$T_f(z) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{0<\eta<\delta} \frac{1}{\lambda(K_\eta(z))} \int_{K_\eta(z)} |f(\zeta) - f(z)|\, d\lambda(\zeta).$$

Zeigen Sie, dass für $f, f_1, f_2 \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{T})$ und $h \in C(\mathbb{T})$ gilt:

(i) $T_{f_1+f_2} \leq T_{f_1} + T_{f_2}$,

(ii) $T_f(z) \leq |f(z)| + M(\lambda_f)(z)$ für alle $z \in \mathbb{T}$,

(iii) $T_h \equiv 0$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ heißt subharmonisch*, falls u nach oben halbstetig ist und*

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it})\, dt$$

fur jedes $z_0 \in \Omega$ mit $u(z_0) > -\infty$ und jede reelle Zahl $r > 0$ mit $\overline{D}_r(z_0) \subset \Omega$ gilt (Die Existenz des Lebesgue-Integrals wird mit verlangt).

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Sei $u : G \to [-\infty, \infty)$ eine subharmonische Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Gibt es ein $a \in G$ mit $u(z) \leq u(a)$ für alle $z \in G$, so ist $u \equiv u(a)$.
(*Hinweis: Betrachten Sie die Menge $\{z \in G;\ u(z) = u(a)\}$.*)

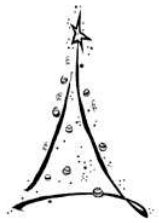
(bitte wenden)

Aufgabe 16 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Sei $u_1 \geq u_2 \geq \ldots$ eine monoton fallende Folge subharmonischer Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass der punktweise Limes $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ subharmonisch auf Ω ist.

(b) Seien $u_n : \Omega \to [-\infty, \infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ subharmonische Funktionen auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ so, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ lokal nach oben beschränkt ist auf Ω und die Funktion $u = \limsup_{n\to\infty} u_n$ nach oben halbstetig ist. Zeigen Sie, dass u subharmonisch ist.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest, einen guten Rutsch ins neue Jahr und viel Erfolg für 2012!



Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre